This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3809.00

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE FUND OF

CHARLES MINOT

(Class of 1828)

Received 6 Feb., 1901.

UEBER

DIE NOTHWENDIGKEIT DER BESCHRÄNKUNG

DES

JACOBI'SCHEN UMKEHRPROBLEMS

AUF

ABEL'SCHE INTEGRALE ERSTER GATTUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG

DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

WELCHE MIT

GENEHMIGUNG DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT

HALLE-WITTENBERG

SONNABEND, DEN 3. MÄRZ 1900, VORMITTAGS 11 UHR

ZUGLEICH MIT DEN ANGEHÄNGTEN THESEN

ÖFFENTLICH VERTEIDIGEN WIRD

BERNHARD VON LUDWIG

AUS NEUWALTERSDORF.

OPPONENTEN:

HERR CAND. MATH. HERMANN MÜLLER.

HERR CAND. MATH. FRIEDRICH NEUMANN.

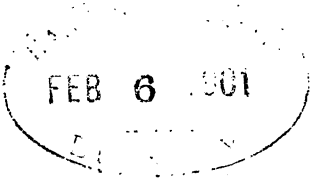
HALLE a. S.,

HOFBUCHDRUCKEREI VON C. A. KAEMMERER & CO.

1900.

~~Math 2349.00.2~~
Math 3809.00

FEB 6 1901



Minor fund

Es sei y durch die irreducible algebraische Gleichung m^{ten} Grades

$$F(x, y) = \sum_{\lambda=o}^{m} f_\lambda(x)\, y^\lambda = o$$

als algebraische Funktion von x definirt, wobei die f bekanntlich stets als ganze rationale Funktionen von x vorausgesetzt werden können. Die durch diese Gleichung bestimmte $m$blättrige Riemann'sche Fläche T habe das Geschlecht p, sodass stets Systeme von p und nicht mehr linear unabhängigen Abel'schen Integralen 1. Gattung für dieses algebraische Gebilde existiren.

In dieser Fläche T denken wir uns p Stellen $(x, y) = (c_\lambda, d_\lambda)\ (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ beliebig, aber fest gewählt, während $(x, y) = (x_\lambda, y_\lambda)\ (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ p von einander unabhängig und unbeschränkt veränderliche Stellen der Fläche T bedeuten mögen. Sind dann $R_\lambda(x, y)\ (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ irgend p rationale Funktionen von x und y, so definiren wir p Grössen $v_\lambda\ (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ durch das Gleichungssystem

$$\text{(I)} \begin{cases} v_1 = \int_{(c_1 d_1)}^{(x_1, y_1)} R_1(x, y)\, dx + \int_{(c_2 d_2)}^{(x_2, y_2)} R_1(x, y)\, dx + \ldots + \int_{(c_p, d_p)}^{(x_p, y_p)} R_1(x, y)\, dx \\ v_2 = \int_{(c_1 d_1)}^{(x_1, y_1)} R_2(x, y)\, dx + \int_{(c_2 d_2)}^{(x_2, y_2)} R_2(x, y)\, dx + \ldots + \int_{(c_p, d_p)}^{(x_p, y_p)} R_2(x, y)\, dx \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ v_p = \int_{(c_1 d_1)}^{(x_1, y_1)} R_p(x, y)\, dx + \int_{(c_2 d_2)}^{(x_2, y_2)} R_p(x, y)\, dx + \ldots + \int_{(c_p, d_p)}^{(x_p, y_p)} R_p(x, y)\, dx \end{cases}$$

als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_p$ unter der Voraussetzung, dass hierbei die zu übereinanderstehenden Integralen gehörigen Integrationswege übereinstimmen, im Uebrigen aber beliebig sind.

Es ist nun aus der Theorie der Abelschen Funktionen bekannt, dass, wenn man sich auf die Fälle beschränkt, wo die $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ irgend p linear unabhängige Integranden 1. Gattung sind, das System (I) eindeutig umkehrbar wird, in dem Sinne, dass, wenn man $v_1, v_2, \ldots v_p$ als unabhängige Variable betrachtet, zu jeden Werthsystem $v_1, v_2, \ldots v_p$, solange die Bahnen dieser Grösse wirklich unabhängig von einander verlaufen, ein und nur ein System von Stellen $(x, y) = (\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ gehört, mit denen die Stellen (x_λ, y_λ) $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ in irgend einer Reihenfolge übereinstimmen müssen, um die Relationen (I) bei geeigneter Verfügung über die Integrationswege zu erfüllen.

Die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems ist nun weiter nichts, als die Ermittelung dieser Stellen $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$, wodurch man zur Bildung der Abel'schen Funktionen, d. h. der rationalen symmetrischen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_p$ geführt wird, die sich als eindeutige Funktionen von $v_1, v_2, \ldots v_p$ ergeben und durch Thetafunktionen darstellbar sind.

Es liegt nun sehr nahe, sich die Frage vorzulegen, ob die oben genannte Beschränkung hinsichtlich der $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ nicht allein die hinreichende, sondern auch die nothwendige Bedingung dafür ist, damit das System (I) in dem angegebenen Sinne eindeutig umkehrbar bleibt. Unter Benutzung von Schlussweisen, die von Herrn Professor Fuchs namentlich in einer, in den Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen im Jahre 1881 erschienenen Arbeit angewandt sind, gelingt es nun zu beweisen, dass diese Frage bejahend zu beantworten ist, dass man sich also in der That auf linear unabhängige Abel'sche Integrale 1. Gattung beschränken muss, wenn man an der Forderung der oben definirten eindeutigen Umkehrbarkeit des Systems (I) festhält.

§ 1.

Damit überhaupt die durch (I) definirten Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$ als unabhängige Variable betrachtet werden können, müssen die gewählten Funktionen $R_\lambda(x,y)(\lambda=1,2\ldots p)$ linear unabhängig von einander sein; existirte nämlich eine identisch erfüllte Relatien

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \gamma_\lambda R_\lambda(x,y) = o$$

sobald man für $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$ passende constante Werthe wählt, ohne dass diese sämmtlich verschwinden, so würden die hieraus sich ergebenden Identäten

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \gamma_\lambda R_\lambda(x_i, y_i) = o\,(i = 1, 2, \ldots p)$$

das identische Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} R_1(x_1,y_1), R_1(x_2,y_2), \ldots R_1(x_p,y_p) \\ R_\lambda(x_1,y_1), R_2(x_2,y_2), \ldots R_2(x_p,y_p) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ R_p(x_1,y_1), R_p(x_2,y_2), \ldots R_p(x_p,y_p) \end{vmatrix}$$

uns folglich, da diese weiter nichts ist als die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial v_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial v_2}{\partial x_p} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{\partial v_p}{\partial x_1}, \frac{\partial v_p}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial v_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}$$

eine Beziehung zwischen den Variablen $v_1, v_2, \ldots v_p$ nach sich ziehen.

Ebensowenig wie hiernach eine der Funktionen $R_\lambda(x,y)$ identisch verschwinden darf, darf auch $\frac{1}{R_\lambda(x,y)}$

nicht identisch Null sein; da dann $R_\lambda(x, y) = \frac{1}{\frac{1}{R_\lambda(x, y)}}$ überhaupt nicht als rationale Funktion von x und y zu betrachten wäre.

Die Funktionen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ können somit sicher nur eine endliche Anzahl von Null- und Unendlichkeitsstellen besitzen. Ferner müssen diese Funktionen offenbar so gewählt sein, dass die Reihen, welche durch allgemeine gliedweise Integration der Entwickelungen entstehen, die die Funktionen $R_\lambda(x, y)$ in der Umgebung der angenommenen unteren Integrationsgrenzen (c_k, d_k) $(k = 1, 2, \ldots p)$ besitzen, für diese Stellen keine unendlich grossen Werthe ergeben, denn sonst würde für jede beliebige in der Nähe von (c_k, d_k) gelegene Stelle (x_k, y_k) das Integral

$$\int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} R_\lambda(x, y)\, dx = \infty$$

sein. In der Umgebung der genannten Stelle würde also dieses Integral als Grenzwerth und folglich auch die Definition (I) jeden Sinn verlieren.

Aus diesen Resultaten lässt sich nun ein Satz ableiten, der uns später von Nutzen sein wird:

Es seien $(x, y) = (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ beliebig gegebene Stellen der Riemann'schen Fläche in endlicher Anzahl und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ irgend k verschiedene aus den Zahlen $1, 2, \ldots p$. Dannn lassen sich, so wird behauptet, für alle Werthe $k = 1, 2, \ldots p$, nach Annahme willkürlicher constanter Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$, von denen wenigstens einer von Null verschieden ist, stets $k - 1$ von (ξ_1, η_1), $(\xi_2, \eta_2), \ldots$ verschiedene Stellen $(x, y) = (\alpha_1, \beta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2), \ldots (\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})$ so bestimmen, dass die Determinante

$$D_k = \begin{vmatrix} \gamma_1, R_{\lambda_1}(\alpha_1, \beta_1), R_{\lambda_1}(\alpha_2, \beta_2), \ldots R_{\lambda_1}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) \\ \gamma_2, R_{\lambda_2}(\alpha_1, \beta_1), R_{\lambda_2}(\alpha_2, \beta_2), \ldots R_{\lambda_2}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_k, R_{\lambda_k}(\alpha_1, \beta_1), R_{\lambda_k}(\alpha_2, \beta_2), \ldots R_{\lambda_k}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) \end{vmatrix}$$

welche für $k = 1$ in $D_1 = \gamma_1$ übergeht, einen von Null verschiedenen endlichen Werth besitzt:

da für $k = 2$ eine der Grössen γ_1, γ_2 nicht Null ist, so ist $\gamma_1 R_{\lambda_2}(x, y) - \gamma_2 R_{\lambda_1}(x, y)$, weil ein identisches Verschwinden dieses Ausdruckes mit der linearen Unabhängigkeit der Funktionen R_{λ_1}, R_{λ_2}, also *a* fortiori der Funktionen $R_1, R_2, \ldots R_p$ unverträglich ist, eine algebraische Funktion von x, die eine wohlbestimmte, endliche Anzahl von Nullstellen besitzt. Nach Ausschluss derselben sowie der Unendlichkeitsstellen von $R_{\lambda_1} R_{\lambda_2}$ bleiben somit unendlich viele auch von (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), . . . verschiedene Stellen $(x, y) = (\alpha_1, \beta_1)$ übrig, für die $D_2 = \gamma_1 R_{\lambda_2}(\alpha_1, \beta_1) - \gamma_2 R_{\lambda_1}(\alpha_1, \beta_1)$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth besitzt. Da also unser Satz für $k = 1, 2$ richtig ist, so brauchen wir nur noch den Schluss der vollständigen Induction anzuwenden. Indem wir demgemäss voraussetzen, der Satz sei für irgend einen Werth $k = l$ bewiesen, können wir offenbar $l - 1$ von (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), . . . verschieden Stellen $(x, y) = (\alpha_1, \beta_1)$, (α_2, β_2), . . . $(\alpha_{l-1}, \beta_{l-1})$ so wählen, dass nicht nur die mit D_l identische, zum Element $R_{\lambda_{l+1}}(\alpha_l, \beta_l)$ in der Determinante D_{l+1} gehörige Unterdeterminante weder Null noch unendlich ist, sondern, dass auch die zu den übrigen Elementen der letzten Colonne von D_{l+1} gehörigen Unterdeterminanten endliche Werthe haben, die wir resp. mit $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_l$ bezeichnen wollen. Hierzu ist nämlich nur nöthig, ausser den Unendlichkeitsstellen von $R_{\lambda_1}, R_{\lambda_2}, R_{\lambda_l}$ auch noch die von $R_{\lambda_{l+1}}$ bei der Wahl der Stellen (α_1, β_1), (α_2, β_2), . . . $(\alpha_{l-1}, \beta_{l-1})$ auszuschliessen, was wir dadurch bewirken können, dass wir uns die genannten Unendlichkeitsstellen von vornherein mit unter die Stellen (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), . . . aufgenommen denken.

Da sich nun, nachdem diese Wahl getroffen, durch Entwickelung nach der letzten Colonne

$$D_{l+1} = \delta_1 R_{\lambda_1}(\alpha_l, \beta_l) + \delta_2 R_{\lambda_2}(\alpha_l, \beta_l) + \ldots \delta_{l+1} R_{\lambda_{l+1}}(\alpha_l, \beta_l)$$

ergiebt, wenn wir den erhaltenen Werth von D_l mit δ_{l+1} bezeichnen, und da

$$\delta_1 R_{\lambda_1}(x, y) + \delta_2 R_{\lambda_2}(x, y) + \ldots + \delta_{l+1} R_{\lambda_{l+\lambda}}(x, y)$$

wegen $\delta_{l+1} \neq o$ in Folge der linearen Unabhängigkeit der R als nicht identisch verschwindende algebraische Funktion von x, solange $l + 1 \leqq p$ ist, sicher nur eine endliche Anzahl von Null- und Unendlichkeitsstellen besitzt, so folgt, dass wir auch für (α_l, β_l) noch unendlich viele von (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), . . . verschiedene Stellen wählen können, für die D_{l+1} weder Null noch unendlich wird; d. h. der Satz gilt auch für $k = l + 1$ und ist somit nach Obigem allgemein bewiesen.

Mit denselben Mitteln lässt sich in ganz ähnlicher Weise auch folgender, später anzuwendender Satz beweisen:

Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ beliebig gegebene Werthe in endlicher Anzahl und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ irgend k verschiedene aus den Zahlen $1, 2, \ldots p$, dann lassen sich für alle Werthe $k = 1, 2, \ldots p$ stets k von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ und von einander verschiedene Werthe $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ so wählen, dass die $k \,.\, m$ Determinanten, die sich aus

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} R_{\lambda_1}(\alpha_1, y_1), & R_{\lambda_1}(\alpha_2, y_2), & \ldots & R_{\lambda_1}(\alpha_k, y_k) \\ R_{\lambda_2}(\alpha_1, y_1), & R_{\lambda_2}(\alpha_2, y_2), & \ldots & R_{\lambda_2}(\alpha_k, y_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{\lambda_k}(\alpha_1, y_1), & R_{\lambda_k}(\alpha_2 y_2), & \ldots & R_{\lambda_k}(\alpha_k, y_k) \end{vmatrix}$$

ergeben, wenn man hierin für $y_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots k)$ die sämmtlichen m Wurzelwerthe y der Gleichung $F(\alpha_\lambda, y) = o$ unabhängig von einander successive einsetzt, lauter von Null verschiedene endliche Werthe besitzen:

Ist $k = 1$, so braucht man, um der Forderung zu genügen, bei der Wahl $x = \alpha_1$ offenbar ausser $\xi_1, \xi_2, \ldots$ nur die sicher in endlicher Anzahl vorhandener Werthe von x zu vermeiden, für die sich Null- oder Unendlichkeitsstellen von $R_{\lambda_1}(x, y)$ ergeben.

Setzen wir ferner voraus, dass der Satz für irgend ein $k = l$ richtig ist, so können wir uns l von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ und von einander verschiedene Werthe $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_l$ so gewählt denken, dass für die genannten Wurzelwerthe sich nicht nur für die mit Δ_l identische, zu $R_{\lambda_{l+1}}(\alpha_{l+1}, y_{l+1})$ in Δ_{l+1} gehörige Unterdeterminante lauter endliche von Null verschiedene Werthe gegeben, sondern dass auch die zu den übrigen Elementen der letzten Colonne von Δ_{l+1} gehörigen Unterdeterminanten $U_1, U_2, \ldots U_l$ endlich bleiben; denn hierzu ist offenbar nur nöthig, ausser den Werthen von x, für die $R_{\lambda_1}(x, y), R_{\lambda_2}(x, y), \ldots R_{\lambda_l}(x, y)$ Unendlichkeitsstellen besitzen, auch noch diejenigen bei der Wahl auszuschliessen, für die $R_{\lambda_{l+1}}(x, y)$ unendlich wird, was sich dadurch erreichen lässt, dass wir uns alle diese Werthe von x unter die Werthe $\xi_1, \xi_2, \ldots$ von Anfang an mit aufgenommen denken. Nach jeder solchen Wahl ergeben sich dann aus $U_1 . R_{\lambda_1}(x, y) + U_2 R_{\lambda_2}(x, y) + \ldots + U_l R_{\lambda_l}(x, y) + \Delta_l R_{\lambda_{l+1}}(x, y)$ nach jeder Einsetzung entsprechender Wurzelwerthe in $U_1, U_2, \ldots U_l, \Delta_l$ rationale Funktionen von und $x\, y$, die wegen der linearen Unabhängigkeit der R und wegen $\Delta_l \neq o$ nicht identisch verschwinden können, so dass es sicher nur eine endliche Anzahl von x-Werthen giebt, für welche eine dieser Funktionen Null oder unendlich wird. Nach Ausschliessung dieser x-Werthe, sowie der Werthe $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bleiben somit noch unendlich viele, auch von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_l$ verschiedener Werthe übrig, die für α_{l+1} gewählt werden können, damit die Grössen

$$\Delta_{l+1} = U_1 R_{\lambda_1}(\alpha_{l+1}, y_{l+1}) + U_2 R_{\lambda_2}(\alpha_{l+1}, y_{l+1}) + \ldots + U_l R_{\lambda_l}(\alpha_{l+1}, y_{l+1}) + \Delta_l R_{\lambda_{l+1}}(\alpha_{l+1}, y_{l+1}),$$

welchen Wurzelwerth man auch für y_{l+1} einsetzen mag, endlich und von Null verschieden sind; d. h. unser Satz gilt für $k = l + 1$, sobald er für $k = l$ bewiesen ist; da er nun für $k = 1$, wie wir sahen, richtig ist, so ist hiermit seine allgemeine Gültigkeit durch vollständige Induktion dargethan.

§ 2.

Im weiteren Verlauf dieser Untersuchung werden wir davon Gebrauch zu machen haben, dass sich stets rationale Funktionen von x und y bestimmen lassen, welche an einer beliebig gewählten Stelle $(x, y) = (a, b)$ der Riemann'schen Fläche mit einer willkürlich vorgeschriebenen Ordnungszahl k verschwinden.

Obwohl dieser Satz sich als Folgerung aus der Theorie der Elementarintegrale 2. Gattung ergiebt, einer Theorie, mit deren Hülfe man Abel'sche Integrale 2. Gattung mit verschwindenden Periodicitätsmoduln, also rationale Funktionen von x und y bilden kann, die an vorgeschriebenen Stellen mit vorgeschriebenen Ordnungszahlen unendlich gross werden und sonst überall endlich bleiben, wofern nur die Anzahl der gegebenen Stellen gross genug ist, so möchte ich doch gern einen von mir gefundenen einfachen Beweis, der von der genannten Theorie ganz unabhängig ist, an dieser Stelle entwickeln:

Die Gesammtheit aller rationalen Funktionen von x und y wollen wir, da sie sich durch die rationalen Operationen reproduciren, den Körper K nennen, als dessen Elemente wir die genannten Funktionen bezeichnen. Offenbar genügt es nun vollständig, zu zeigen, dass K im Element R enthält, das an der Stelle (a, b) genau erster Ordnung verschwindet; denn dann erfüllt sofort das ebenfalls in K vorhandene Element R^k die gestellte Bedingung.

Es sei nun, um gleich den allgemeinsten Fall ins Auge zu fassen, (a, b) eine Verzweigungsstelle $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, wobei also $1 \leqq \alpha \leqq m$ sein muss; d. h. die die Riemann'sche Fläche definirende Funktion y kehrt in der Umgebung dieser Stelle nach je α und nicht nach weniger Umläufen, die x um a in der gewöhnlichen complexen Ebene macht, zu ihren Werthen zurück, und es ist, wenn wir, jenachdem a im Endlichen liegt, oder mit dem unendlich fernen Punkte zusammenfällt, $\xi = x - a$ oder $\xi = \frac{1}{x}$

setzen und $t = \xi^{\frac{1}{\alpha}}$ definieren, y ebenso wie überhaupt jedes in K enthaltene Element S in der Form

$$S = t^s (A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots)$$

in der Umgebung der Stelle (a, b) darstellbar, worin der erste Coefficient A_0 von Null verschieden ist, während die ganze rationale Zahl s, wenn sie positiv ist, die Ordnungszahl des Verschwindens von S an dieser Stelle angiebt.

Da sich der Fall $\alpha = 1$ einfach damit erledigt, dass dann schon das in K enthaltene Element ξ die gewünschte Ordnungszahl 1 an der Stelle (a, b) besitzt, so setzen wir $\alpha > 1$ voraus, so dass sich α sicher als Product von Primzahlen darstellen lässt.

Die Erledigung dieses Falles erleichtert uns die Bemerkung, dass, wenn S irgend ein Element von K ist, nothwendig auch $t \cdot \frac{dS}{dt}$ ein solches sein muss, obwohl im Allgemeinen weder t noch $\frac{dS}{dt}$ in K enthalten sein worden; denn aus $\xi = t^\alpha$ folgt

$$t \cdot \frac{dS}{dt} = t \cdot \frac{dS}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} = \alpha \cdot \xi \frac{dS}{d\xi} = \alpha \cdot \xi \frac{dS}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi},$$

womit die Behauptung bewiesen, da $\frac{dx}{d\xi}$ entweder mit 1 oder mit $-\frac{1}{\xi^2}$ identisch ist, und da $\frac{dS}{dx}$ bekanntlich ebenso wie ξ als rationale Funktion von x und y darstellbar ist.

Offenbar lässt sich stets eine ganze positive Zahl r so wählen, dass das durch $y_1 = \xi^r \cdot y$ definierte Element y_1 von K an der Stelle (a, b) sicher verschwindet, auch, wenn y bei Annäherung an diese Stelle dem absoluten Betrage nach über alle Grenzen wachsen sollte. Es besitzt also y_1 in der Umgebung der Stelle eine Entwickelung von der Form

$$y_1 = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

während dann die, durch die Rekursionsformel

$$y_\mu = t \cdot \frac{dy_{\mu-1}}{dt} \quad (\mu = 2, 3, \ldots)$$

definierten Funktionen, die nach unserer Bemerkung ebenfalls sämmtlich in K enthalten sind, in der Umgebung der Stelle (a, b), wie durch successive Differentiationen leicht ersichtlich, die Entwickelungen

$$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\mu-1} a_\nu t^\nu \; (\mu = 1, 2, \ldots)$$

besitzen. Wenn wir nun auch zulassen müssen, dass beliebig viele der Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ verschwinden, so ist doch so viel gewiss, dass für jede in α enthaltene Primzahl q sich nothwendig von Null verschiedene Coefficienten a_λ angeben lassen müssen, deren index λ nicht durch q theilbar ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde die Darstellung der Funktion y_1 in der genannten Umgebung die Form

$$y_1 = b_1 t^q + b_2 t^{2q} + b_3 t^{3q} + \ldots = b_1 (t^q) + b_2 (t^q)^2 + b_3 (b^q)^3 + \ldots$$

annehmen, d. h. y_1 wäre in der Umgebung der Stelle (a, b) nach ganzen positiven Potenzen von

$$t^q = \xi^{\frac{q}{\alpha}} := \xi^{\frac{1}{\alpha_1}}$$

worin die ganze positive Zahl $\alpha_1 = \frac{\alpha}{q}$ sicher kleiner als α ist, entwickelbar und folglich würde wegen y_1 auch die definierende Funktion $y = \frac{y_1}{\xi^r}$ schon nach α_1, also nach weniger als α Umläufen von x um a in der complexen Ebene zu ihren Werthen zurückkehren, was mit der vorausgesetzten Ordnung der Verzweigung in Widerspruch steht.

Es sei demgemäss a_λ der erste in der Entwickelung von y_1 auftretende von Null verschiedene Coefficient, dessen index λ nicht durch q theilbar ist; so bilden wir aus den Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_\lambda$, indem wir unter $c_1, c_2, \ldots c_\lambda$ noch näher zu bestimmende Constante verstehen die Funktion

$$\eta = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_\lambda y_\lambda,$$

die nach Obigem ebenfalls ein Element von K ist und in der Umgebung von $(x, y) = (a, b)$, wie leicht zu sehen, die Entwickelung

$$\eta = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (c_1 + \nu \cdot c_2 + \nu^2 c_3 + \ldots + \nu^{\lambda-1} c_\lambda) t^\nu$$

besitzt. Definieren wir daher $c_1, c_2, \ldots c_\lambda$ als Lösungen des linearen, nicht homogenen Gleichungssystems

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_\lambda = o \\ c_1 + 2\,c_2 + 2^2 c_3 + \ldots + 2^{\lambda-1} c_\lambda = o \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ c_1 + (\lambda-1)\,c_2 + (\lambda-1)^2 c_3 + \ldots + (\lambda-1)^{\lambda-1} c_\lambda = o \\ c_1 + \lambda\, c_2 + \lambda^2\, c_3 + \ldots + \lambda^{\lambda-1} c_\lambda = \dfrac{1}{a_\lambda} \end{cases}$$

was wegen $a_\lambda \neq o$ und weil die Auflösungsdeterminante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2, & \ldots & 1^{\lambda-1} \\ 1 & 2 & 2^2, & \ldots & 2^{\lambda-1} \\ — & — & — & — & — \\ 1 & \lambda & \lambda^2, & \ldots & \lambda^{\lambda-1} \end{vmatrix}$$

als Differenzenproduct der von einander verschiedenen Zahlen 1, 2, ... λ ebenfalls von Null verschieden ist, stets und nur auf eine Weise geschehen kann, so geht die Entwickelung von η über in die Form

$$\eta = t^\lambda (1 + e_1\, t + e_2\, t^2 + \ldots)$$

d. h. η verschwindet genau mit der Ordnungszahl λ an der Stelle (a, b), wobei λ nicht durch q theilbar ist.

Wir ersehen also hieraus, dass, wenn $q_1, q_2, \ldots q_\varrho$ die verschiedenen in α aufgehenden Primzahlen sind, wir sicher ϱ in K vorhandene Elemente $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\varrho$ zu bilden in der Lage sind von der Beschaffenheit, dass, wenn wir ihre Ordnungszahlen des Verschwindens an der Stelle $(x, y) = (a, b)$ resp. mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\varrho$ bezeichnen, dies ganze positive Zahlen sind, von denen λ_1 nicht durch q_1, λ_2 nicht durch q_2 etc. und λ_ϱ nicht durch q_ϱ theilbar ist. Da also der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_\varrho$, α hiernach sicher den Werth 1 hat, so lassen

sich, wie aus den Elementen der Zahlentheorie bekannt, stets $\varrho + 1$ ganze rationale Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_\varrho, n$ so bestimmen, dass

$$n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + \ldots + n_\varrho \lambda_\varrho + n \alpha = 1$$

wird. Setzen wir dann $R = \eta_1^{n_1} \cdot \eta_2^{n_2} \ldots \eta_\varrho^{n_\varrho} \cdot \xi^n$, so ist R sicher ein in K vorhandenes Element, also eine rationale Funktion von x und y die an der Stelle $(x, y) = (a, b)$, wie leicht ersichtlich, genau mit der Ordnungszahl 1 Null wird, und hiermit ist nach Obigem die eingangs dieses Paragraphen aufgestellte Behauptung als vollständig bewiesen zu betrachten.

§ 3.

Von entscheidender Bedeutung für das Gelingen des in Rede stehenden Beweises ist endlich folgender allgemeiner Satz:

Es seien für ein gewisses um den Nullpunkt abgegrenztes Variabilitätsbereich p Grössen $v_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ durch das Gleichungssystem

$$(1)\quad \begin{cases} v_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1,p-1} x_{p-1} + a_{1p} x_p^n + G_1 (x_1, x_2, \ldots x_p) \\ v_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2,p-1} x_{p-1} + a_{2p} x_p^n + G_2 (x_1, x_2, \ldots x_p) \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ v_p = a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \ldots + a_{p,\,p-1} x_{p-1} + a_{pp} x_p^n + G_p (x_1, x_1, \ldots x_p) \end{cases}$$

als Funktionen der unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots x_p$ definiert unter der Voraussetzung, dass die aus den Constanten a gebildete Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ - & - & - & - \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt, und dass die Ausdrücke $G_\lambda (x_1, x_2, \ldots x_p) (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x_1, x_2, \ldots x_p$ fortschreitende Potenzreihen darstellen, deren Glieder mindestens von der zweiten Dimension hinsichtlich dieser Grössen sind und x_p,

da, wo es isolirt auftritt, mit einem Exponenten enthalten, der grösser ist, als die ganze positive von Null verschiedene Zahl n. Dann lässt sich zeigen, dass sich nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\delta > o$ stets in beliebiger Nähe des Nullpunktes p Kreise $K_1, K_2, \ldots K_p$ von endlicher Ausdehnung in der complexen Ebene beschreiben lassen, welche folgende Bedeutung haben: Man betrachte in (1) $v_1, v_2, \ldots v_p$ als unabhängige Veränderliche und beschränke ihre Variabilität beziehungsweise auf das Innere der Kreise $K_1, K_2, \ldots K_p$, wodurch offenbar in keiner Weise verhindert wird, dass die Bahnen der v unabhängig von einander verlaufen. Es gehören dann zu jedem willkürlich gewählten Werthesysteme $v_1, v_2, \ldots v_p$ Werthesysteme $x_1, x_2, \ldots x_p$, welche die Gleichungen (1) erfüllen und den Bedingungen $| x_\lambda | < \delta\, (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ genügen, und zwar können hierbei für x_p stets n von einander und von Null verschiedene Werthe gesetzt werden.

Der Beweis dieses Satzes gestaltet sich folgendermaassen:

Der Convergenzbereich der Potenzreihen G möge durch die Bedingungen $| x_i | < R_i (i = 1, 2, \ldots p)$ gegeben sein; führen wir dann $p - 1$ Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$ ein, indem wir $x_k = x_p^n z_k$ $(k = 1, 2, \ldots p - 1)$ setzen, so werden die v-Funktionen von $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p$, indem insbesondere die G nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen fortschreiten und für unabhängige Werthe derselben sicher convergent bleiben, wenn wir der Variabilität dieser neuen Veränderlichen die Bedingungen $|z_k| < \frac{R_k}{R_p^n} (k = 1, 2, \ldots p - 1)$, $| x_p | < R_p$ dictiren. Nach den über die G gemachten Voraussetzungen erhalten aber die Glieder dieser Ausdrücke durch die angewandte Substitution den gemeinsamen Faktor x_p^n, so dass offenbar auch die Grössen $\frac{v_\mu}{x_p^n} (\mu = 1, 2, \ldots p)$ für die eben genannten Bereiche endliche, stetige, eindeutige und differentiierbare Funktionen

von $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p$ sind, welche sich nach dem Taylor'schen Satze, wie leicht ersichtlich in der Form

$$(2) \quad \frac{v_\mu}{x_p^n} = a_{\mu p} + a_{\mu 1} z_1 + a_{\mu 2} z_2 + \ldots + a_{\mu, p-1} z_{p-1} + \mathfrak{b}_\mu x_p + H_\mu (z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p)$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots p)$$

entwickeln lassen, worin die $\mathfrak{b}_\mu$ wohlbestimmte Constante sind, während die H_μ, anfangend mit den Gliedern zweiter Dimension, nach ganzen positiven Potenzen von $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p$ fortschreiten.

Da die Reihenfolge der Gleichungen (1) und (2) gleichgültig ist, so können wir voraussetzen, dass $| a_{pp} |$ der grösste der absoluten Beträge $| a_{\mu p} |$ $(\mu = 1, 2, \ldots p)$ sei; folglich muss, da wegen $A \neq o$ eine der Grössen $a_{\mu p}$ $(\mu = 1, 2, \ldots p)$ sicher von Null verschieden ist nothwendig $a_{pp} \neq o$ und überdies

$$o \leqq \left| \frac{a_{kp}}{a_{pp}} \right| \leqq 1 \; (k \neq 1, 2, \ldots p-1)$$

sein. Aus $a_{pp} \neq o$ ergiebt sich wegen (2), dass $\frac{v_p}{x_p^n}$ für alle Werthe $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p$ von hinlänglich kleinen absoluten Beträgen durchweg von Null verschieden ist. Daher sind auch für dieselben Bereiche die Funktionen

$$\frac{v_k}{v_p} = \frac{\frac{v_k}{x_p^n}}{\frac{v_p}{x_p^n}} \; (k = 1, 2, \ldots p-1)$$ (die für $p = 1$ natürlich ganz in Fortfall kommen) nach dem Taylor'schen Satze in der Form

$$\frac{v_k}{v_p} = \mathfrak{c}_{k0} + \mathfrak{c}_{k1} z_1 + \mathfrak{c}_{k2} z_2 + \ldots + \mathfrak{c}_{k, p-1} z_{p-1} + \beta_k x_p + J_k (z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p)$$

$$(k = 1, 2, \ldots p-1)$$

entwickelbar, worin die J_k wiederum nach ganzen positiven Potenzen von $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p$ fortschreiten, indem sie mit den Gliedern zweiter Dimension beginnen, während sich nach dem genannten Satze und wegen (2):

$$c_{ko} = \frac{a_{kp}}{a_{pp}} \text{ und } c_{k\lambda} = \left(\frac{\partial \begin{pmatrix} v_k \\ \overline{x_p^n} \\ v_p \\ \overline{x_p^n} \end{pmatrix}}{\partial z_\lambda} \right)_{z_1 = z_2 = \ldots = z_{p-1} = x_p = o} = \frac{a_{pp} a_{k\lambda} - a_{kp} a_{p\lambda}}{a_{pp}^2} (k, \lambda = 1, 2, \ldots p-1)$$

ergiebt. Auf die Werthe der constanten Grössen $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{p-1}$ kommt es uns nicht an.

Nun gilt wegen

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ — & — & — & — \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{p1} & \ldots & a_{p,\,p-1} \\ a_{1p} & a_{11} & \ldots & a_{1,\,p-1} \\ — & — & — & — \\ a_{p-1,p} & a_{p-1,1} & \ldots & a_{p-1,p-1} \end{vmatrix}$$

dass nach dem Sylvester'schen Determinantensatze

$$A = \frac{1}{a_{pp}^{p-2}} \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1,\,p-1} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2,\,p-1} \\ — & — & — & — \\ d_{p-1,\,1} & d_{p-1,\,2} & \ldots & d_{p-1,p-1} \end{vmatrix}$$

ist, wenn man die Determinanten zweiten Grades $a_{pp} a_{k\lambda} - a_{kp} a_{p\lambda}$ mit $d_{k\lambda}$ bezeichnet; also ergiebt sich für die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1p-1} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2p-1} \\ — & — & — & — \\ c_{p-1,\,1} & c_{p-1,\,2} & \ldots & c_{p-1,p-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{pp}^{2p-2}} \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1p-1} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2p-1} \\ — & — & — & — \\ d_{p-1,1} & d_{p-1,2} & \ldots & d_{p-1,p-1} \end{vmatrix}$$

dass $C = \frac{A}{a_{pp}^p}$ ist; es hat also wegen $A \neq o$ und wegen $a_{pp} \neq o$ die Determinante C einen endlichen, von Null verschiedenen Werth, während für die Grössen c_{ko} die Relationen

$$o \leqq |\, c_{ko} \,| \leqq 1 \,(k = 1,\ 2,\ \ldots\ p-1)$$

bestehen. Definieren wir noch $w_k = \frac{v_k}{a_p} - c_{ko}\,(k = 1, 2, \ldots$ $p-1)$ und $w_p = x_p$, so erhalten wir aus den letzten Reihenentwickelungen das Gleichungssystem:

$$(3)\quad \begin{cases} w_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \ldots + c_{1,p-1}z_{p-1} + \beta_1 x_p + J_1(z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p) \\ w_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \ldots + c_{2,p-1}z_{p-1} + \beta_2 x_p + J_2(z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p) \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ w_{p-1} = c_{p-1,1}z_1 + c_{p-1,2}z_2 + \ldots + c_{p-1,p-1}z_{p-1} + \beta_{p-1}x_p + J_{p-1}(z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p) \\ w_p = o \cdot z_1 + o \cdot z_2 + \ldots + o \cdot z_{p-1} + 1 \cdot x_p + o \end{cases}$$

woraus sich wegen

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1,p-1} & \beta_1 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,p-1} & \beta_2 \\ - & - & - & - & - \\ c_{p-1,1} & c_{p-1,2} & \ldots & c_{p-1,p-1} & \beta_{p-1} \\ o & o & \ldots & o & 1 \end{vmatrix} = C \neq o$$

nach einem bekannten Satze für unabhängige Werthe von $w_1,\ w_2,\ \ldots\ w_{p-1},\ x_p$ von hinlänglich kleinen absoluten Beträgen Potenzentwicklungen

$$z_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, w_p) = \mathfrak{P}_\lambda(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p)$$
$$(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ p-1)$$

eindeutig als Umkehrungen ergeben; und zwar nehmen diese Potenzentwicklungen, wenn wir unter dem Constantensystem

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1p} \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2p} \\ - & - & - & - \\ e_{p1} & e_{p2} & \ldots & e_{pp} \end{pmatrix}$$

das reciproke System zu

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1,p-1} & \beta_1 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,p-1} & \beta_2 \\ - & - & - & - & - \\ c_{p-1,1} & c_{p-1,2} & \ldots & c_{p-1,p-1} & \beta_{p-1} \\ o & o & \ldots & o & 1 \end{pmatrix}$$

verstehen, die Form an

$$(4)\quad \begin{cases} z_1 = e_{11}w_1 + e_{12}w_2 + \ldots + e_{1,p-1}w_{p-1} + e_{1p}x_p + M_1(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p) \\ z_2 = e_{21}w_1 + e_{22}w_2 + \ldots + e_{2,p-1}w_{p-1} + e_{2p}x_p + M_2(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p) \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ z_{p-1} = e_{p-1,1}w_1 + e_{p-1,2}w_2 + \ldots + e_{p-1,p-1}w_{p-1} + e_{p-1,p}x_p + M_{p-1}(w_1, w_2 \ldots w_{p-1}, x_p) \end{cases}$$

worin die M nach ganzen positiven Potenzen von w_1, w_2, . . . w_{p-1}, x_p fortschreiten und in jedem Gliede mindestens von der zweiten Dimension hinsichtlich dieser Grössen sind.

Diese Ausdrücke für z_1, z_2, . . . z_{p-1} denken wir uns in die letzte der Gleichungen (2) eingesetzt und erhalten hierdurch nach dem Taylor'schen Satze eine analoge Potenzentwickelung

$$\frac{v_p}{x_p^n} = a_{pp} + a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_{p-1}w_{p-1} + a_px_p + M(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p)$$

worin a_1, a_2, . . . a_p leicht zu bestimmende Constante sind, während von M dasselbe gilt, wie von obigen Ausdrücken M_1, M_2, . . . M_{p-1}. Da $a_{pp} \neq o$ ist, so können wir aus dieser Darstellung von $\frac{v_p}{x_p^n}$, indem wir beiderseits die $n$te Wurzel ausziehen und $t_p = v_p^{\frac{1}{n}}$ definieren, mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes für hinlänglich kleine Werthe von $|w_1|$, $|w_2|$, . . . $|w_{p-1}|$, $|x_p|$, nachdem wir für $a_{pp}^{\frac{1}{n}} = \alpha_{pp}$ einen beliebigen der n von Null verschiedenen Wurzelwerthe fixiert haben, die Gleichung

$$\frac{t_p}{x_p} = \alpha_{pp} + \alpha_1w_1 + \alpha_2w_2 + \ldots + \alpha_{p-1}w_{p-1} + \alpha_px_p + N(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p)$$

und hieraus

$$t_p = \alpha_{pp}\, x_p + P(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p)$$

herleiten, worin von der Constanten α_{pp}, α_1, α_2, . . . α_{p-1}, α_p die erste sicher von Null verschieden ist, während N und P

nach ganzen positiven Potenzen von $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p$ fortschreiten und nur Glieder von zweiter oder höherer Dimension hinsichtlich dieser Grössen enthalten.

Betrachten wir daher, indem wir für einen Augenblick $t_1 = w_1, t_2 = w_2, \ldots t_{p-1} = w_{p-1}$ definiren, das System

$$(5)\quad \begin{cases} t_1 = 1.\ w_1 + 0.\ w_2 + \ldots + 0.\ w_{p-1} + 0.\ x_p + 0 \\ t_2 = 0.\ w_1 + 1.\ w_2 + \ldots + 0.\ w_{p-1} + 0.\ x_p + 0 \\ \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \\ t_{p-1} = 0.\ w_1 + 0.\ w_2 + \ldots + 1.\ w_{p-1} + 0.\ x_p + 0 \\ t_p = 0.\ w_1 + 0.\ w_2 + \ldots + 0.\ w_{p-1} + \alpha_{pp} x_p + P(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p) \end{cases}$$

so folgt aus

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ — & — & — & — & — \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{pp} \end{vmatrix} = \alpha_{pp} \neq 0$$

nach dem bereits bei (3) benutzten Satze eine analoge Umkehrung wie dort, die wir hier in die Gleichung

$$(6)\quad x_p = \frac{1}{\alpha_{pp}} t_p + Q\,(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}\, t_p)$$

zusammenfassen können, worin Q, anfangend mit den Gliedern zweiter Dimension nach ganzen positiven Potenzen von $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p$ fortschreitet und $\frac{1}{\alpha_{pp}}$ wegen $\alpha_{pp} \neq 0$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth besitzt.

Es sei nun $|w_1| < \varrho_1, |w_2| < \varrho_2, \ldots |w_{p-1}| < \varrho_{p-1}$, $|t_p| < \varrho_p$ der Bereich, für welchen Q convergent ist, so ist dies *a* fortiori der Fall, wenn wir nunmehr der Variabilität von $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p$ die Bedingungen

$$|w_i| \leqq |t_p| \leqq \varrho \ (i = 1, 2, \ldots p-1)$$

vorschreiben, indem wir unter ϱ eine vorläufig noch unbestimmte, aber an die Ungleichungen

$$0 < \varrho < \varrho_\lambda \ (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

gebundene positive Grösse verstehen.

Sind $e_1, e_2, \ldots e_n$ die sämmtlichen $n$ten Einheitswurzeln, so stellen $t_p^{(\lambda)} = e_\lambda\, t_p^{(o)}\ (\lambda = 1, 2, \ldots n)$ die sämmtlichen Werthe, die t_p für ein bestimmtes v_p der Gleichung $v_p = t_p^n$ gemäss annehmen kann, dar, wenn $t_p^{(o)}$ irgend einer derselben ist.

Die hierzu nach Annahme eines Werthsystems $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}$ zufolge der Gleichung (6) gehörigen Werthe von x_p mögen resp. mit $x_p^{(\lambda)}\ (\lambda = 1, 2, \ldots n)$ bezeichnet sein. Der absolute Betrag von $t_p^{(o)}$ sei τ, so dass sich $| t_p^{(\lambda)} | = \tau$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ und $| v_p | = \tau^n$ ergiebt, wobei nach unserer letzten Festsetzung

$$| w_i | \leqq \tau \leqq \varrho\ (i = 1, 2, \ldots p-1)$$

sein muss. Ferner werde der kleinste der absoluten Beträge $| e_k - e_\lambda |\ \binom{k, \lambda = 1, 2, \ldots n}{k \neq \lambda}\ \gamma$ genannt, so dass γ, da es bekanntlich die Länge einer Seite des dem Einheitskreise einbeschriebenen regulären n-Ecks darstellt, eine nur von n abhängige von Null verschiedene Grösse ist, die jedoch nicht grösser als der Durchmesser dieses Kreises, also nicht grösser als 2 sein kann. Bezeichnet man endlich die Reihe der absoluten Beträge der Glieder von $Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p)$, nachdem man hierin $w_1 = w_2 = \ldots = w_{p-1} = t_p = \tau$ gesetzt hat, wodurch letztere den gemeinsamen Faktor τ^2 erhalten, mit $\tau^2 . S$, so lässt sich wegen der absoluten Convergenz von Q sicher eine endliche positive Zahl g angeben derart, dass für alle Werthe $\tau \leqq \varrho$

$$g > 2S$$

ist, während andererseits die Relationen

$$\tau^2 S \geqq | Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(\lambda)}) |\ (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

für alle in dem betrachteten Bereiche liegenden Werthesysteme $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(\lambda)}$ bestehen.

Während daher einerseits

$$\left| \frac{1}{\alpha_{pp}} (t_p^{(k)} - t_p^{(\lambda)}) \right| = \left| \frac{1}{\alpha_{pp}} \right| . \tau . \left| e_k - e_\lambda \right| \geq \gamma \left| \frac{1}{\alpha_{pp}} \right| . \tau$$

ist, folgt andererseits

$$| Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(k)}) - Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(\lambda)}) | \leqq$$
$$| Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(k)}) | + | Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(\lambda)}) | \leqq 2\tau^2 S < g\tau^2,$$

so lange $\tau > 0$ ist. Wählen wir also für ϱ einen beliebig kleinen positiven echten Bruch der Ungleichungen

$$0 < \varrho < \frac{\gamma}{g} \left| \frac{1}{\alpha_{pp}} \right|$$

erfüllt und schreiben, nachdem wir hierauf noch eine zweite positive Zahl σ beliebig im Sinne der Ungleichungen

$$0 < \sigma < \varrho$$

angenommen haben, vor, dass

$$\sigma \leqq \tau \leqq \varrho$$

sein soll, so ergiebt sich $g\tau < \gamma \left| \frac{1}{\alpha_{pp}} \right|$, also

$$g\tau^2 < \gamma \left| \frac{1}{\alpha_{pp}} \right| \tau,$$

also nach Obigem

$$\left| \frac{1}{\alpha_{pp}} (t_p^{(k)} - t_p^{(\lambda)}) \right| > \left| Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(k)}) - Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(\lambda)}) \right|$$
$$\begin{pmatrix} k, \lambda = 1, 2, \ldots n \\ k \neq \lambda \end{pmatrix}$$

und folglich

$$x_p^{(k)} - x_p^{(\lambda)} = \frac{1}{\alpha_{pp}} (t_p^{(k)} - t_p^{(\lambda)}) + Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(k)}) - Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p^{(\lambda)}) \neq 0$$

d. h. zu jedem, in den Bereichen $| w_i | \leqq \sigma (i = 1, 2, \ldots p-1)$, $\sigma^n \leqq | v_p | \leqq \varrho^n$ liegenden Werthesysteme $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, v_p$ gehören vermöge der Gleichung (6) genau n Werthe von x_p, die sämmtlich verschieden sind und von denen keiner verschwindet, denn wegen $| t_p | = \tau$ folgt auf Grund der bereits festgestellten Relationen, dass

$$| Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p) | \leqq \tau^2 S < \frac{1}{2} g\tau^2 < \frac{1}{2} \gamma \left| \frac{1}{\alpha_{pp}} \right| \tau$$

also wegen $\frac{1}{2}\gamma \leqq 1$ *a fortiori*:

$$\left| Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p) \right| < \left| \frac{1}{\alpha_{pp}} t_p \right|$$

ist, also $x_p = \frac{1}{\alpha_{pp}} t_p + Q(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, t_p) \neq 0.$

Da wir uns hierbei σ und ϱ noch beliebig verkleinert denken können, so können wir hinsichtlich der Anfangs vorgeschriebenen beliebig kleinen Zahl $\delta > o$, wie aus der Stetigkeit der für die Nullwerthe ihrer Argumente verschwindenden Potenzreihen (6) und (4) hervorgeht, offenbar auch erreichen, dass diese n Werthe von x_p für jedes in den angegebenen Bereichen liegende Werthesystem $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, v_p$ sämmtlich den Relationen $| x_p | < \delta$ genügen und überdies den absoluten Beträgen noch so klein sind, dass die aus ihnen in Verbindung mit $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}$ aus (4) sich ergebenden Werthesystem $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$ alle die Ungleichungen $| z_i | < \frac{1}{\delta^{n-1}}$ $(i = 1, 2, \ldots p-1)$ erfüllen und dass endlich auch die Convergenzbedingungen der Potenzreihen (5) und (3) gewahrt sind.

Nunmehr, nachdem die Zahlen ϱ, σ den angegebenen Bedingungen gemäss festgelegt sind, wählen wir innerhalb der Fläche des mit dem inneren Radius σ^n und dem äusseren Radius ϱ^n um den Nullpunkt beschriebenen Kreisringes beliebig einen Punkt a und beschreiben um ihn einen Kreis K_p, dessen Radius r_p der Ungleichung

$$r_p < \frac{\sigma^{n+1}}{2}$$

genügt und unter allen Umständen so klein bemessen ist, dass K_p ganz in der Fläche des Kreisringes enthalten ist. Hierauf construiren wir um die Punkte $a . c_{ko}$ $(k = 1, 2, \ldots p-1)$ beziehungsweise die Kreise K_k $(k = 1, 2, \ldots p-1)$ deren Radien r_k wir, je nachdem c_{ko} Null oder von Null verschieden ist, den Ungleichungen

$$| r_k | < \sigma^{n+1} \text{ oder } | r_k | \leq r_p . | c_{ko} |$$

unterwerfen. Wegen $| c_{ko} | \leq 1$ $(k = 1, 2, \ldots p-1)$ liegen dann, wie leicht ersichtlich, die Mittelpunkte sämmtlicher Kreise $K_1, K_2, \ldots K_p$ innerhalb des mit dem Radius ϱ^n um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, so dass wir sie, da wir ϱ beliebig verkleinern dürfen, in der That beliebig nahe an den Nullpunkt heranrücken können.

Wählen wir nun für $v_1, v_2, \ldots v_p$ ein willkürliches Werthsystem derart, dass v_λ innerhalb K_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ liegt, so ergiebt sich hieraus wegen $v_p \neq o$ ein eindeutig bestimmtes Werthsystem

$$w_1 = \frac{v_1}{v_p} - c_{10}, w_2 = \frac{v_2}{v_p} - c_{20}, \ldots w_{p-1} = \frac{v_{p-1}}{v_p} - c_{p-1,o}, v_p ,$$

wobei offenbar v_p die Relationen

$$\sigma^n \leqq | v_p | \leqq \varrho^n$$

erfüllt. Für die w_k $(k = 1, 2, \ldots p-1)$ gilt, falls $c_{ko} = o$, also $w_k = \frac{v_k}{v_p}$, also $| w_k | = \frac{|v_k|}{|v_p|}$ ist, dass, da nach unseren Festsetzungen in diesem Falle $| v_k | < \sigma^{n+1}$ und $| v_p | \geqq \sigma^n$ ist, nothwendig $| w_k | < \frac{\sigma^{n+1}}{\sigma^n} = \sigma$ sein muss; ist dagegen $c_{ko} \neq o$ so folgt, da v_p in dem mit dem Radius r_p um a geschlagenen Kreise K_p. also $c_{ko} \cdot v_p$ in dem mit den Radius $r_p \cdot | c_{ko} |$ um den Punkt $a \cdot c_{ko}$ geschlagenen Kreise L_k liegt, dass in diesem Falle wegen $| r_k | \leqq r_p | c_{ko} |$ der Kreis K_k ganz im Kreise L_k enthalten ist; mithin sind v_k und $c_{ko} \cdot v_p$ zwei Punkte im Innern desselben Kreises L_k woraus sich $|v_k - c_{ko} v_p | \leqq 2 r_p | c_{ko} |$, also wegen $2 r_p < \sigma^{n+1}$ und wegen $| c_{ko} | \leqq 1$ die Ungleichung $| v_k - c_{ko} v_p | < \sigma^{n+1}$ ergiebt; mithin ist in Anbetracht von $| v_p | \geqq \sigma^n$ wiederum

$$| w_k | = \left| \frac{v_k}{v_p} - c_{ko} \right| = \frac{|v_k - c_{ko} v_p|}{|v_p|} < \frac{\sigma^{n+1}}{\sigma^n} = \sigma.$$

Es zeigt sich also, dass das zu dem gewählten Werthsystem $v_1, v_2, \ldots v_p$ eindeutig gehörende Werthsystem $w_1, w_2 \ldots w_{p-1}, v_p$ gerade diejenigen Bedingungen erfüllt. welche, wie wir sahen, hinreichend sind, damit Gleichung (6), wenn wir $t_p = v_p^{\frac{1}{n}}$ definieren, für das letztgenannte System genau n von einander und von Null verschiedene Werthe $x_p = x_p^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$, für die $| x_p^{(\lambda)} | < \delta$ ist, liefert, während jedes dieser x_p in Verbindung mit $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}$ vermöge der Gleichungen (4) zu einem Werthe-

system $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$ führt, das den Ungleichungungen $|z_i| < \frac{1}{\delta^{n-1}}$ $(i = 1, 2, \ldots p-1)$ genügt. Setzt man dann $x_i = x_p^n z_i$ $(i = 1, 2, \ldots p-1)$, so folgt $|x_i| = |x_p^n||z_i| < \frac{\delta^n}{\delta^{n-1}} = \delta$; also in der That $|x_\lambda| < \delta$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$.

Dass alle diese so aus den unabhängig von einander gewählten Werthen $v_1, v_2, \ldots v_p$ hergeleiteten Werthesysteme $x_1, x_2, \ldots x_p$ in Verbindung, mit den ersterem die Ausgangsgleichungen (1) auch wirklich erfüllen, ergiebt sich unmittelbar, wenn man die bisherigen Ausführungen rückwärts durchläuft: Wegen der Gleichung (6) wird auch die letzte Gleichung (5) und wegen der Gleichungen (4) wird auch das Gleichungssystem (3) erfüllt, da (6) und (4) als identische Umkehrungslösungen von (5) und (3) hergeleitet waren, deren Convergenzbedingungen, wie wir sahen, ebenfalls gewahrt sind. Von der letzten Gleichung (5) gelangt man aber durch Potenzieren eindeutig zur Gleichung

$$\frac{v_p}{x_p^n} = a_{pp} + a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_{p-1} w_{p-1} + a_p x_p + M(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p)$$

und hieraus wegen (4) und (3) zur letzten Gleichung (2) zurück, deren rechte Seite ja in Verbindung mit (4) identisch, also mit übereinstimmenden Coefficienten in

$$a_{pp} + a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_{p-1} w_{p-1} + a_p x_p + M(w_1, w_2, \ldots w_{p-1}, x_p)$$

übergeführt worden war. Multipliciert man dann die letzte Gleichung (2) mit den aus (3) wegen $w_k = \frac{v_k}{v_p} - c_{ko}$ $(k = 1, 2, \ldots p-1)$ sich ergebenden Gleichungen

$$\frac{v_k}{v_p} = c_{ko} + c_{k1} z_1 + c_{k2} z_2 + \ldots + c_{k,p-1} z_{p-1} + \beta_k x_p + J_k(z_1, z_2, \ldots z_{p-1}, x_p)$$
$$(k = 1, 2, \ldots p-1),$$

so erhält man eindeutig auch die übrigen Gleichungen (2), die für $z_k = \frac{x_k}{x_p^n}$ $(k = 1, 2, \ldots p-1)$, da $x_p \neq o$ ist, in

der That wieder in das Gleichungssystem (1) übergehn, aus dem sie abgeleitet waren.

Hiermit ist unser Satz, der geradezu als Fundamentalsatz für unsere ganze Untersuchung angesehen werden muss und desshalb so ausführlich bewiesen wurde, als durchaus gesichert zu betrachten.

§ 4.

Nach den in § 1 enthaltenen allgemeinen Vorbemerkungen über die Funktionen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ liegt es nunmehr nahe, das Verhalten dieser Funktionen in der Umgebung der besonders ausgezeichneten Punkte der Riemann'schen Fläche, also der Verzweigungsstellen und des unendlich fernen Punktes zu untersuchen.

In dieser Beziehung sind wir nun mit Hülfe der Ergebnisse der vorhergehenden Paragraphen vollständig in der Lage, zunächst folgendes wichtiges Resultat herzuleiten:

Ist $(x, y) = (a, b)$ eine beliebige, im Endlichen gelegene, d. h. zu einem endlichen $x = a$ gehörige Stelle der Riemann'schen Fläche, so muss es, wenn wir die zugehörige Ordnungszahl der Verzweigung mit $\alpha - 1$ bezeichnen, unter den Funktionen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$, damit das Gleichungssystem (I) in dem in der Einleitung angegebenen Sinne eindeutig, umkehrbar bleibt, wenigstens eine geben, welche an dieser Stelle mindestens mit der Ordnungszahl $\alpha - 1$ unendlich gross wird, resp., falls $\alpha = 1$, also (a, b) keine eigentliche Verzweigungsstelle sein sollte, an dieser Stelle nicht verschwindet.

Dieser Satz, aus dem sich sofort die Folgerung ergiebt, dass die Funktionen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ an keiner im Endlichen gelegenen Stelle der Riemann'schen Fläche gleichzeitig verschwinden dürfen, lässt sich auf folgende Art beweisen:

In der Umgebung der Stelle $(x, y) = (a, b)$ existiert, wenn man $t = (x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ setzt, eine Entwickelung von der Form

$$y = t^r (\beta_0 + \beta_1 t + \ldots),$$

worin r eine ganze rationale Zahl und $\beta_0, \beta_1, \ldots$ wohlbestimmte Constanten sind, deren erste nicht verschwindet. Ebenso gelten ganz analoge Entwickelungen

$$R_\lambda (x, y) = t^{s_\lambda} (c_{0\lambda} + c_{1\lambda} t + \ldots) \; (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

für die rationalen Funktionen $R_\lambda (x, y)$, in denen ebenfalls $c_{0\lambda} \neq o$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ ist.

Da es nun unter den p ganzen rationalen Zahlen s_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ sicher eine solche giebt, die, wenn wir sie mit s bezeichnen, die Relationen $s \leqq s_\lambda \; (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ erfüllt, so können wir die letzten Entwickelungen auch in der Form schreiben

$$R_\lambda (x, y) = \gamma_{s\lambda} t^s + \gamma_{s+1,\lambda} t^{s+1} + \ldots \; (\lambda = 1, 2, \ldots p),$$

wobei feststeht, dass eine der Zahlen $\gamma_{s\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ von Null verschieden ist. Zum Beweise unseres Satzes ist es also nur nöthig, zu zeigen, dass $s \leqq -(\alpha - 1)$ ist.

Wir beweisen dies indirekt, indem wir die Annahme machen, es sei $s > -(\alpha - 1)$. Zufolge der Bemerkungen im ersten Theile des § 1 ergiebt sich dann für die Integrale $\int_{(c_p, d_p)}^{(x_p, y_p)} R_\lambda (x, y)\, dx \; (\lambda = 1, 2, \ldots p)$, wenn man unter $(x, y) = (x_p, y_p)$ eine, innerhalb der Umgebung von (a, b) variable Stelle der Riemann'schen Fläche versteht und $t = (x_p - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ setzt, nach der Theorie der Abel'schen Integrale in der genannten Umgebung eine Darstellung von der Form:

$$\int_{(c_p, d_p)}^{(x_p, y_p)} R_\lambda (x, y)\, dx = C_\lambda + e_{o\lambda} t^{s+\alpha} + e_{1\lambda} t^{s+\alpha=1} + \ldots \; (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

da hier wegen $s > -(\alpha - 1)$, wie leicht ersichtlich, logarithmische Glieder bei der Integration nicht auftreten

können. Während man hierin unter C_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ die Integrationsconstanten zu verstehen hat, sind die übrigen Coefficienten durch $e_{k\lambda} = \frac{\alpha \cdot \gamma_{s+k,\lambda}}{s+\alpha+k} \binom{\lambda = 1, 2, \ldots p}{k = 0, 1, 2, \ldots}$ wegen $s + \alpha \geqq 2$ als bestimmte endliche Grössen definiert.

Insbesondere muss von den Grössen

$$e_{0\lambda} = \frac{\alpha \cdot \gamma_{s,\lambda}}{s+\alpha} (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

wegen der $\gamma_{s,\lambda}$ und weil $\alpha \geqq 1$ ist, nothwendig mindestens eine von Null verschieden sein. Aus diesem Grunde ist es nach den ersten in § 1 bewiesenen Determinantensatz möglich, $p-1$ Stellen $(x, y) = (a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots p-1)$, welche sämmtlich im Endlichen liegen und weder Verzweigungsstellen, noch Unendlichkeitsstellen der $p+1$ Funktionen y, $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ sind, so in der Riemann'schen Fläche zu bestimmen, dass die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} R_1(a_1, b_1), & R_1(a_2, b_2), \ldots R_1(a_{p-1}, b_{p-1}), e_{01} \\ R_2(a_1, b_1), & R_2(a_2, b_2), \ldots R_2(a_{p-1}, b_{p-1}), e_{02} \\ \cdots & \cdots \\ R_p(a_1, b_1), & R_p(a_2, b_2), \ldots R_p(a_{p-1}, b_{p-1}), e_{0p} \end{vmatrix},$$

die für $p = 1$ im $D = e_{01} \neq o$ übergeht, einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt, und dass die Grössen $x = a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ alle von a verschieden sind.

Wählen wir dann $(x, y) = (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots p-1)$ als variable Stellen in den respektiven Umgebungen von (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \ldots p-1)$, so dass dort Entwickelungen von der Form

$$y_i = \delta_{0i} + \delta_{1i}(x_i - a_i) + \ldots (i = 1, 2, \ldots p-1)$$

bestehen, so liefert die Theorie der Abel'schen Integrale für diese Umgebungen die Darstellungen

$$\int_{(c_i, d_i)}^{(x_i, y_i)} R_\lambda(x,y)\,dx = C_{\lambda i} + R_\lambda(a_i, b_i)(x_i - a_i) + \beta_{2\lambda}^{(i)}(x_i - a_i)^2 + \ldots \binom{\lambda = 1,2,\ldots p}{i = 1,2,\ldots p-1},$$

wo die $C_{\lambda i}$ Integrationsconstante sind, während die $\beta_{k\lambda}^{(i)}$ $(k=2,3,\ldots)$ ebenso wie die Anfangscoefficienten R_λ (a_i, b_i) wohlbestimmte endliche Werthe haben. Aus diesen Ergebnissen folgt ohne Weiteres, dass sich die durch das Gleichungssystem (I) der Einleitung definierten Grössen v_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ für ein gewisses um den Nullpunkt abgegrenztes Variabilitätsbereich der Veränderlichen

$$x_1 - a_1,\ x_2 - a_2 \ldots x_{\lambda-1} - a_{\lambda-1},\ t$$

nach ganzen positiven Potenzen dieser Variablen nach dem Taylor'schen Satze entwickeln lassen müssen; und zwar erhalten wir hierdurch, wie leicht zu sehen, das System

$$\text{I)}\quad \begin{cases} v_1-e_1=R_1(a_1,b_1)(x_1-a_1)+R_1(a_2,b_2)(x_2-a_2)+\ldots+R_1(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+e_{01}t^{s+\alpha}+G_1 \\ v_2-e_2=R_2(a_1,b_1)(x_1-a_1)+R_2(a_2,b_2)(x_2-a_2)+\ldots+R_2(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+e_{02}t^{s+\alpha}+G_2 \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ v_p-e_p=R_p(a_1,b_1)(x_1-a_1)+R_p(a_2,b_2)(x_2-a_2)+\ldots+R_p(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+e_{0p}t^{s+\alpha}+G_p \end{cases}$$

worin $e_1, e_2, \ldots e_p$, nachdem über die Integrationscurven bis in die Umgebungen der Stellen (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$ (a_{p-1}, b_{p-1}), (a, b) in irgend einer Weise verfügt ist, wohlbestimmte Grössen bedeuten, die sich durch Zusammenfassung der Integrationsconstanten ergeben, während die Ausdrücke $G_1, G_2, \ldots G_p$, beginnend mit den Gliedern zweiter Dimension, nach ganzen positiven Potenzen von $(x_1 - a_1)$, $(x_2 - a_2)$, $\ldots$ $(x_{p-1} - a_{p-1})$, t fortschreiten und insbesondere t nur in höheren Potenzen als $t^{s+\alpha}$ enthalten.

Denken wir uns nun in der gewöhnlichen complexen Ebene resp. um die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}, a$ genügend kleine Kreise $O_1, O_2, \ldots O_{p-1}, O_p$ beschrieben, die wir, was wegen $a_\lambda \neq a$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p-1)$ sicher möglich ist, insbesondere auch so klein wählen, dass der Kreis O_p keinen Punkt mit einem der Kreise $O_1, O_2, \ldots O_{p-1}$ gemein hat, so ist, wenn wir die Variabilität von x_i $(i = 1, 2, \ldots p)$ auf das Innere des Kreises O_i $(i = 1, 2, \ldots p)$ beschränken und $t = (x_p - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ setzen, das System (II) innerhalb dieser Bereiche in Verbindung mit den entsprechenden Definitionen

$$(1)\begin{cases} y_1 = \delta_{01} + \delta_{11}(x_1 - a_1) + \dots \\ y_2 = \delta_{02} + \delta_{12}(x_2 - a_2) + \dots \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ y_{p-1} = \delta_{0,p+1}\,\delta_{1,p-1}(x_{p-1} - a_{p-1}) + \dots \\ y_p = t^r(\beta_0 + \beta_1 t + \dots) \end{cases}$$

dem Systeme (I) für alle $(x_i, y_i)\,(i = 1, 2, \dots p)$ in den Umgebungen von respektive (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\dots (a_{p-1}, b_{p-1})$, (a, b) als äquivalent zu betrachten, falls in (I) über die Integrationswege bis in die genannten Umgebungen in obiger Weise verfügt wird. Nach unseren im vorigen Paragraphen enthaltenen Fundamentalsatze lassen sich nun, da die Determinante D von Null verschieden ist und wegen $s + \alpha \geqq 2$ sicher p Kreise $K_1, K_2 \dots K_p$ um Punkte, die in beliebiger Nähe von resp. $e_1, e_2, \dots e_p$ liegen, so beschreiben, dass für jedes willkürliche Werthesystem $v_1, v_2 \dots v_p$, wofern nur v_i innerhalb K_i $(i = 1, 2, \dots p)$ gewählt ist, Werthesysteme $x_1, x_2, \dots x_{p-1}$, t existiren, welche die Gleichungen (II) erfüllen und so beschaffen sind, dass x_i innerhalb $O_i\,(i = 1, 2, \dots p-1)$ und t innerhalb eines, um den Nullpunkt mit dem Radius r_p geschlagenen Kreises $O_p^{(1)}$ liegt, wenn r_p^{α} den Radius des Kreises O_p bezeichnet; und zwar können hierbei für t mindestens zwei von einander verschiedene Werthe $t = t_1, t_2$ gewählt werden. Wählen wir $t = t_1$, so seien die vermöge $x_p - a = t^{\alpha}$ und wegen (1) hierzu gehörigen Werthe von x_p und y_p resp. mit $\xi_p^{(1)}$, $\eta_p^{(1)}$ bezeichnet, während dann $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\dots$ $\xi_{p-1}^{(1)}$ die Werthe von resp. $x_1, x_2, \dots x_{p-1}$ darstellen mögen, welche den Werth $t = t_1$ zu einem der soeben als vorhanden bewiesenen Werthesysteme $x_1, x_2, \dots x_{p-1}$, t ergänzen, das die Gleichungen (II) befriedigt. Aus den $x_k = \xi_k^{(1)}$ $(k = 1, 2, \dots p-1)$ ergeben sich dann vermöge (1) die zugehörigen Werthe $y_k = \eta_k^{(1)}$ $(k = 1, 2, \dots p-1)$. Wählen wir dagegen $t = t_2$, so mögen die analogen Bezeichnungen durch $\xi_1^{(2)}$, $\xi_2^{(2)}$, $\dots$ $\xi_{p-1}^{(2)}$, $\xi_p^{(2)}$ und $\eta_1^{(2)}$, $\eta_2^{(2)}$, $\dots$ $\eta_{p-1}^{(2)}$, $\eta_p^{(2)}$ gegeben sein. Aus unseren Darlegungen geht dann hervor, dass $(\xi_\lambda^{(1)}, \eta_\lambda^{(1)})\,(\lambda = 1,$

2, . . . p) und $\xi_\lambda^{(2)}$, $\eta_\lambda^{(2)}$) ($\lambda = 1, 2, \ldots p$) zwei Systeme von Stellen der Riemann'schen Fläche sind von der Beschaffenheit, dass, wenn das System (x_λ, y_λ) ($\lambda = 1, 2, \ldots p$) mit irgend einem von ihnen in Uebereinstimmung gesetzt wird, die Gleichungen (I) für die obigen, unabhängig von einander gewählten Werthe von $v_1, v_2, \ldots v_p$ befriedigt werden; und dies steht offenbar in Widerspruch mit der in der Einleitung definierten eindeutigen Umkehrbarkeit von (I), sobald sich herausstellt, dass die beiden Systeme $(\xi_\lambda^{(1)}, \eta_\lambda^{(1)})$ ($\lambda = 1, 2, \ldots p$) und $(\xi_\lambda^{(2)}, \eta_\lambda^{(2)})$ ($\lambda = 1, 2, \ldots p$) auch abgesehen von der Reihenfolge ihrer Elemente wirklich von einander verschieden sind. Um dies zu beweisen, genügt es offenbar, zu zeigen, dass z. B. die Stelle $(\xi_p^{(2)}, \eta_p^{(2)})$ mit keiner der Stellen $(\xi_\lambda^{(1)}, \eta_\lambda^{(1)})$ ($\lambda = 1, 2, \ldots p$) identisch sein kann. Nun ist zunächst unmittelbar ersichtlich, dass $(\xi_p^{(2)}, \eta_p^{(2)})$ von den Stellen $(\xi_\lambda^{(1)}, \eta_\lambda^{(1)})$ ($\lambda = 1, 2, \ldots p-1$) verschieden sein muss; denn da t_2 in $O_p^{(1)}$ liegt, liegt $\xi_p^{(2)}$, wie leicht zu sehen, im Kreise O_p, während die Werthe $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots \xi_{p-1}^{(1)}$ dem Inneren der Kreise $O_1, O_2, \ldots O_{p-1}$ angehören. Da nun O_p mit keinem der Kreise $O_1, O_2, \ldots O_{p-1}$ einen Punkt gemein hat, so kann schon keiner der letztgenannten ξ=Werthe mit $\xi_p^{(2)}$ zusammen fallen. Ebensowenig kann aber auch $(\xi_p^{(2)}, \eta_p^{(2)})$ mit $(\xi_p^{(1)}, \eta_p^{(1)})$ übereinstimmen; denn bildet man nach § 2 $u\,(x, y)$ als rationale Funktion von x und y, die an der Stella (a, b) genau erster Ordnung verschwindet und folglich in der Umgebung dieser Stelle eine Entwickelung.

$$u = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \ldots$$

besitzt, wo $\gamma_1 \neq o$ ist, so würde sich aus

$$\begin{cases} \xi_p^{(1)} = \xi_p^{(2)} \\ \eta_p^{(1)} = \eta_p^{(2)} \end{cases}$$

wenn man $u_1 = u\,(\xi_p^{(1)}, \eta_p^{(1)})$, $u_2 = u\,(\xi_p^{(2)}, \eta_p^{(2)})$ setzt, die Gleichung $u_1 = u_2$ ergeben; nun folgt aber nach Obigem, da wir uns nach dem Fundamentaltheorem den Kreis $O_p^{(1)}$, in welchem die Werthe $t = t_1, t_2$ liegen, und folglich auch den Kreis O_p beliebig verkleinert denken können, dass

$$\begin{cases} u_1 = \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_1^2 + \dots \\ u_2 = \gamma_1 t_2 + \gamma_2 t_2^2 + \dots \end{cases}$$

sein muss, wobei wir wegen Stetigkeit der für $t = o$ verschwindenden Potenzreihe

$$\gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots$$

durch weitere Verkleinerung von $O_p^{(1)}$ bewirken können, dass u_1, u_2 in einem beliebig kleinen um den Nullpunkt beschriebenen Kreise O liegen. Wählen wir diesen Kreis klein genug, so ergiebt sich nun andererseits für jeden in ihm enthaltenen Werth von u aus $u = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots$ wegen $\gamma_1 \neq o$ bekanntlich eine eindeutige Umkehrung $t = \delta_1 u + \delta_2 u^2 + \dots$, wo $\delta_1 = \frac{1}{\gamma_1} \neq o$ ist, derart, dass jedes Werthepaar u, t das die Gleichung $t = \delta_1 u + \delta_2 u^2 + \dots$ erfüllt, nothwendig auch die Gleichung $u = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots$ erfüllen muss und umgekehrt, wofern nur u im Kreise O und t im Kreise $O_p^{(1)}$ liegt; es müsste also auch

$$\begin{cases} t_1 = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_1^2 + \dots \\ t_1 = \delta_1 u_2 + \delta_2 u_2^2 + \dots \end{cases}$$

sein, was wegen $\begin{cases} u_1 = u_2 \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$ mit der Eindeutigkeit der Potenzreihe $\delta_1 u + \delta_2 u^2 + \dots$ in Widerspruch steht; also sind die Systeme $(\xi_\lambda^{(1)}, \eta_\lambda^{(1)})$ und $(\xi_\lambda^{(2)}, \eta_\lambda^{(2)})$ in der That von einander verschieden.

Wir ersehen also nach Obigem, dass die Annahme $s > -(\alpha - 1)$ mit der geforderten eindeutigen Umkehrbarkeit von (I) unvereinbar ist und dass folglich $s \leqq -(\alpha - 1)$ sein muss. *qu. e. d.*

In Bezug auf den unendlich fernen Punkt können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit bei dieser Untersuchung — und dies soll im Folgenden stets geschehen — die Voraussetzung machen, dass derselbe kein Verzweigungspunkt ist. Gesetzt nämlich, es fänd für $x = \infty$ eine Verzweigung statt, so bestimmen wir, was bekanntlich auf unendlich viele Arten möglich ist, einen endlichen Werth

$x = c$, für welchen die m Wurzeln $y = y_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots m)$ der zu Grunde gelegten irreduciblen algebraischen Gleichung $F(x, y) = o$ sämmtlich von einander verschieden sind und wurden die birationale Transformation

$$(2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{z} + c \\ y = s \end{cases}$$

mit der Umkehrung

$$(3) \quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{x - c} \\ s = y \end{cases}$$

an, wodurch die Riemann'sche (x, y)-Fläche T auf eine Riemann'sche (z, s)-Fläche U bezogen wird, die bekanntlich dasselbe Geschlecht p besitzt, und deren unendlich ferner Punkt kein Verzweigungspunkt ist, da sich für den Werth $z = \infty$ für s wegen (3) die sämmtlich von einander verschiedenen Werthe $(s)_{x=\infty} = (y)_{x=c} = y_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots m)$ ergeben.

Vermöge dieser Transformation geht dann unser Ausgangssystem (I) in ein ganz analoges System

$$(III) \quad v_\lambda = \sum_{k=1}^{p} \int_{(\gamma_k, \delta_k)}^{(\varepsilon_k, \sigma_k)} S_\lambda(z, s)\, dz \quad (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

über, worin die S_λ wohlbestimmte rationale Functionen von z und s sind. Ist nun das System (I) in dem angegebenen Sinne eindeutig umkehrbar, so ist dies auch mit dem System (III) der Fall; denn gäbe es nach Wahl unabhängiger Werthe von $v_1, v_2, \ldots v_p$ zwei verschiedene Systeme von Stellen $(z, s) = (\zeta_\lambda^{(1)}, \sigma_\lambda^{(1)})$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ und $(z, s) = (\zeta_\lambda^{(2)}, \sigma_\lambda^{(2)})$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$, mit welchen das System $(z, s) = (z_\lambda, s_\lambda)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ in Uebereinstimmung gesetzt, die Gleichungen (III) befriedigt, so würden diesen beiden Systemen, wie aus (2) und (3) unmittelbar ersichtlich ist, nothwendig auch zwei von einander verschiedene Systeme von Stellen $(x, y) = (\xi_\lambda^{(1)}, \eta_\lambda^{(1)})(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ und $(x, y) = (\xi_\lambda^{(2)}, \eta_\lambda^{(2)})(\lambda = 1, 2, \ldots p)$

entsprechen, in die das System $(x, y) = (x_\lambda, y_\lambda)\,(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ übergehend, die Gleichungen (I) für dieselben Werthe $v_1, v_2, \ldots v_p$ befriedigt. Gelingt es daher zu beweisen, dass (III) nur dann die in der Einleitung definirte eindeutige Umkehrbarkeit besitzt, wenn die Integrale $\int_{(\gamma_k, \delta_k)}^{(z_k, s_k)} S_\lambda(z, s)\, dz$ sämmtlich von der ersten Gattung sind, so ist hiermit gleichzeitig auch für unser System (I) der geforderte Beweis geliefert; wäre es nämlich möglich, dass (I) eindeutig umkehrbar ist, obwohl eins der Integrale $\int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, y_k)} R_\lambda(x, y)\, dx$ nicht von der ersten Gattung ist, so wäre wie eben gezeigt, auch (III) eindeutig umkehrbar, obwohl das entsprechende Integral

$$\int_{(\gamma_k, \delta_k)}^{(z_k, s_k)} S_\lambda(z, s)\, dz = \int_{(c_k, d_k)}^{(x_k, \eta_k)} R_\lambda(x, y)\, dx$$

nicht von der ersten Gattung ist; denn wegen dieser Gleichung liesse sich für jede Stelle $(x, y) = (x_k, y_k)$ der Fläche T, für welche das Integral der rechten Seite unendlich wird, aus (3) eine Stelle $(z, s) = (z_k, s_k)$ der Fläche U ermitteln, für welche das Integral der linken Seite einen unendlichen Werth annimmt.

Hiermit ist also gezeigt, dass die im Folgenden über den unendlich fernen Punkt gemachte Voraussetzung der Allgemeinheit unserer weiteren Untersuchung in der That gar keinen Abbruch thut.

Wie nun sofort dargelegt werden soll, kann man dann dem eingangs dieses Paragraphen ausgesprochenen und bewiesenen Satze folgendes weitere Resultat zur Seite stellen:

Damit das Gleichungssystem (I) die geforderte eindeutige Umkehrbarkeit besitzt, muss es für jedes Blatt der Riemann'schen Fläche unter den Funktionen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ mindestens eine geben, welche in diesem Blatte für $x = \infty$, falls sie dort überhaupt Null wird, höchstens zweiter Ordnung verschwindet.

Der über den unendlich fernen Punkt gemachten Voraussetzung gemäss, ergiebt sich nämlich in der Umgebung irgend einer der m im Unendlichen gelegenen Stellen $(x, y) = (\infty, y_\infty)$ für das zu $x = \frac{1}{t}$ gehörige y bei analoger Bezeichnung wie früher eine Entwickelung von der Form

$$y = t^r (\beta_o + \beta_1 t + \ldots),$$

denen sich entsprechende Entwickelungen

$$R_\lambda (x, y) = t^{s_\lambda} (c_{o\lambda} + c_{1\lambda} t + \ldots)(\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

anschliessen, wo r, s_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ ganze rationale Zahlen und β_o, $c_{o\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ sämmtlich von Null verschieden sind.

Die letzten Entwickelungen schreiben wir wieder in der Form

$$R_\lambda (x, y) = \gamma_{s,\lambda} t^s + \gamma_{s+1,\lambda} t^{s+1} + \ldots (\lambda = 1, 2, \ldots p),$$

indem wir unter s eine solche aus den ganzen rationalen Zahlen s_λ verstehen, welche die Relationen $s \leqq s_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ erfüllt, so dass wir sicher sind, dass mindestens eine der Zahlen $\gamma_{s,\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ von Null verschieden ist. Wir haben dann um die Richtigkeit unserer Behauptung darzuthun, offenbar nur zu zeigen, dass $s \leqq 2$ sein muss.

Zur Durchführung der apagogischen Beweismethode machen wir die Annahme $s > 2$; dann ergeben sich nach der Theorie der Abel'schen Integrale für jedes in der Umgebung der betrachteten Stelle liegende Werthesystem $(x, y) = (x_p, y_p)$, falls $t = \frac{1}{x_p}$ gesetzt wird, die Darstellungen

$$\int_{(cp,dp)}^{(x_p, y_p)} R_\lambda (x, y)\, dx = C_\lambda + e_{0\lambda} t^{s-1} + e_{1\lambda} t^s + \ldots (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

wenn man mit C_λ die Integrationsconstanten bezeichnet und die übrigen Coefficienten durch $e_{k\lambda} = -\frac{\gamma_{s+k,\lambda}}{s+k-1}\binom{\lambda=1,2,\ldots p}{k=0,1,2,\ldots}$ also weil $s-1 \geqq 2$ ist, als bestimmte endliche Grössen definiert; logarithmische Bestandtheile können nämlich, wie wegen $s > 2$ leicht zu sehen, bei der Integration auch hier nicht auftreten. Aus $e_{0\lambda} = -\frac{\gamma_{s,\lambda}}{s-1}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ folgt wegen der Zahlen $\gamma_{s,\lambda}$, dass mindestens eine der Grössen $e_{0\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ von Null verschieden sein muss. Wir können daher auch hier genau auf dem bereits im Anfange dieses Paragraphen beschrittenen Wege das Ausgangssystem (I) bei anologer Bezeichnung in ein System

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} v_1 - e_1 = R_1(a_1,b_1)(x_1-a_1)+R_1(a_2,b_2)(x_2-a_2)+\ldots+R_1(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+e_{01}t^{s-1} \\ v_2 - e_2 = R_2(a_1,b_1)(x_1-a_1)+R_2(a_2,b_2)(x_2-a_2)+\ldots+R_2(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+e_{02}t^{s-1} \\ \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \\ v_p - e_p = R_p(a_1,b_1)(x_1-a_1)+R_p(a_2,b_2)(x_2-a_2)+\ldots+R_p(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+e_{0p}t^{s-1} \end{cases}$$

worin die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} R_1(a_1,b_1), & R_1(a_2,b_2), & \ldots & R_1,(a_{p-1},b_{p-1}), & e_{01} \\ R_2(a_1,b_1), & R_2(a_2,b_2), & \ldots & R_2,(a_{p-1},b_{p-1}), & e_{02} \\ — & — & — & — & — \\ R_p(a_1,b_1), & R_p(a_2,b_2), & \ldots & R_p(a_{p-1},b_{p-1}) & e_{0p} \end{vmatrix},$$

welche für $p = 1$ in $D = e_{01} \neq o$ übergeht, von Null verschieden ist und wo die G die Variable t nur in höheren Potenzen als t^{s-1} enthalten, überführen, derart, dass für $t = \frac{1}{x_p}$, wenn wir die Variabilität von x_i beziehungsweise auf das Innere genügend kleiner um die Punkte a_i in der complexen Ebene beschriebener Kreise O_i $(i = 1,2,\ldots p-1)$ und die von x_p auf das Aeussere eines genügend grossen, alle O_i in sich enthaltenden, um den Nullpunkt geschlagenen Kreises O_p beschränken, das System (IV) in Verbindung mit den entsprechenden Definitionen

$$(4)\quad \begin{cases} y_1 = \delta_{01} + \delta_{11}(x_1 - a_1) + \dots \\ y_2 = \delta_{02} + \delta_{12}(x_2 - a_2) + \dots \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -- \quad - \quad - \\ x_{p-1} = \delta_{0,p-1} + \delta_{1,p-1}(x_{p-1} - a_{p-1}) + \dots \\ y_p = t^r(\beta_0 + \beta_1 t + \dots) \end{cases}$$

dem Systeme (I) für alle (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots p)$ in den resp. Umgebungen von (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\dots$ (a_{p-1}, b_{p-1}), (∞, y_∞) nach entsprechender Verfügung über die Integrationswege als äquivalent zu betrachten ist.

Aus $D \neq o$ und wegen $s - 1 \geq 2$ folgt dann wieder nach unserem Fundamentalsatze des § 3 dass sich für beliebige innerhalb gewisser Bereiche unabhängig von einander gewählte Werthe $v_1, v_2, \dots v_p$ Werthesysteme $x_1, x_2, \dots x_{p-1}$, t angeben lassen, welche die Gleichungen (IV) erfüllen und so beschaffen sind, dass x_i innerhalb O_i $(i = 1, 2, \dots p - 1)$ und t innerhalb eines, um den Nullpunkt mit dem Radius r_p geschlagenen Kreises $O_p^{(1)}$ liegt, wenn $\frac{1}{r_p}$ den Radius des Kreises O_p bezeichnet; und zwar können hierbei für t mindestens zwei von einander verschiedene Werthe $t = t_1, t_2$ gesetzt werden. Hieraus ergeben sich dann unter Zugrundelegung dieser beiden Werthe und mit Zuhülfenahme von (4) wie früher zwei Systeme von Stellen $(\xi_\lambda^{(1)}, \eta_\lambda^{(1)})$ $(\lambda = 1, 2, \dots p)$ und $(\xi_\lambda^{(2)}, \eta_\lambda^{(2)})$ $(\lambda = 1, 2, \dots p)$, wo die $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}$ innerhalb O_k $(k = 1, 2, \dots p - 1)$, also auch innerhalb O_p und die $\xi_p^{(1)}, \xi_p^{(2)}$ ausserhalb O_p liegen, von der Beschaffenheit, dass das System (x_λ, y_λ) $(\lambda = 1, 2, \dots p)$, wenn es mit irgend einem dieser Systeme identificiert wird, die Gleichungen (I) für die gewählten Werthe $v_1, v_2, \dots v_p$ erfüllt. Da nun z. B. die Stelle $(\xi_p^{(2)}, \eta_p^{(2)})$ im Systeme $(\xi_\lambda^{(1)}, \eta_\lambda^{(1)})$ $(\lambda = 1, 2, \dots p)$ nicht vorkommen kann, indem ja schon $\xi_p^{(2)}$, weil ausserhalb O_p befindlich von den inneren Kreispunkten $\xi_k^{(1)}(k = 1, 2, \dots p-1)$

und ebenso auch von $\xi_p^{(1)}$ wegen $\begin{cases} \xi_p^{(1)} = \frac{1}{t_1} \\ \xi_p^{(2)} = \frac{1}{t_2} \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$ verschieden sein muss, so sind die genannten beiden Systeme wesentlich von einander verschieden. Somit sind wir wiederum auf einen Widerspruch gegen die geforderte eindeutige Umkehrbarkeit von (I) gestossen und müssen daher die gemachte Annahme $s > 2$ fallen lassen; d. h. es muss in der That, wie behauptet, $s \leqq 2$ sein.

§ 5.

Diese Ergebnisse setzen uns in den Stand, den Fall $p = 1$ sofort vollständig zu erledigen. In diesem Falle nämlich muss die Funktion $R_1(x, y)$ als einzige der Funktionen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ nach den beiden Resultaten des vorigen Paragraphen folgende Eigenschaften besitzen:

$R_1(x, y)$ wird an allen wirklichen Verzweigungsstellen $(x, y) = (a, b)$, deren Ordnungszahl $\alpha - 1$ also mindestens gleich 1 ist unendlich gross und zwar wenigstens $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

$R_1(x, y)$ kann überhaupt nur für $x = \infty$ verschwinden und zwar in keinem der m Blätter mit einer höheren Ordnungszahl als 2.

Bezeichnet man daher mit N und U resp. die Anzahl der Null- und Unendlichkeitsstellen von $R_1(x, y)$ in der ganzen Riemann'schen Fläche, indem man jede so oft zählt, als die zugehörige Ordnungszahl angiebt, so dass nach der Theorie der algebraischen Funktionen $N = U$ sein muss, so folgt

$$N \leqq 2m \text{ und } U \geqq \omega,$$

wo $\omega = \Sigma(\alpha - 1)$ die Summe der Ordnungszahlen sämmtlicher in der Riemann'schen Fläche vorkommenden Ver-

zweigungsstellen bedeutet. Nun lehrt aber die eben genannte Theorie, dass stets die Relation

$$(1)\quad \omega = 2m + 2(p-1),$$

also in unserem Falle $\omega = 2m$ bestehen muss, woraus sich hier sofort $N = U = 2m$ ergiebt. Die Eigenschaften der Funktion $R_1(x, y)$ lassen sich daher nunmehr, wie hieraus sofort geschlossen wird, in folgender Weise präcisieren:

Ist $(x, y) = (a, b)$ irgend eine Verzweigungsstelle der Riemann'schen Fläche, die somit nach dem vorigen Paragraphen sicher im Endlichen liegt; so wird, wenn man ihre Ordnungszahl mit $\alpha - 1$ bezeichnet, $R_1(x, y)$ an dieser Stelle genau $(\alpha - 1)$ter Ordnung unendlich.

Ist $(x, y) = (x_0, y_0)$ irgend eine im Endlichen gelegene, d. h. zu einem endlichen x gehörige Stelle, in der keine Verzweigung stattfindet, so besitzt $R_1(x_0, y_0)$ einen endlichen Werth, der überdies, worauf es jetzt nicht mehr ankommt, von Null verschieden ist.

Ist $(x, y) = (\infty, y_\infty)$ irgend eine der m im Unendlichen gelegenen Stellen der Riemann'schen Fläche, so verschwindet $R_1(x, y)$ genau zweiter Ordnung an dieser Stelle.

Aus den hieraus resultierenden Entwickelungen

$$(2)\quad \begin{cases} R_1(x, y) = \alpha_0 (x-a)^{\frac{-(\alpha-1)}{\alpha}} + \alpha_1 (x-a)^{\frac{-(\alpha-1)+1}{\alpha}} + \dots \\ R_1(x, y) = \beta_0 + \beta_1 (x - x_0) + \dots \\ R_1(x, y) = \gamma_0 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \gamma_1 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \dots \end{cases}$$

folgen aber gemäss der Theorie der Abel'schen Integrale für die betreffenden Umgebungen die Darstellungen

$$(3)\quad \begin{cases} \int_{(c_1, d_1)}^{(x, y)} R_1(x, y)\, dx = A + k_0 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + k_1 (x-a)^{\frac{2}{\alpha}} + \dots \\ \int_{(c_1, d_1)}^{(x, y)} R_1(x, y)\, dx = B + \lambda_0 (x - x_0) + \lambda_1 (x - x_0)^2 + \dots \\ \int_{(c_0, d_1)}^{(x, y)} R_1(x, y)\, dx = C + \mu_0 \left(\frac{1}{x}\right) + \mu_1 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \dots \end{cases}$$

worin z. B. $k_0 = \alpha \,.\, \alpha_0$, $\lambda_0 = \beta_0$, $\mu_0 = -\gamma_0$ ist, während A, B, C entsprechende Integrationsconstanten bedeuten, deren Werthe je nach dem Integrationswege nur um endliche Vielfache der Periodicitätsmoduln variieren können. Aus diesen Darstellungen ist nun unmittelbar ersichtlich, dass das Integral $\int_{(c_1, d_1)}^{(x, y)} R_1(x, y)\, dx$ an keiner in der Riemann'schen Fläche gelegenen Stelle (x, y) unendlich gross werden kanu, also ein Integral 1. Gattung ist; $R_1(x, y)$ muss daher, wenn $p = 1$ ist, wegen der geforderten eindeutigen Umkehrbarkeit von (I) in der That ein Integrand 1. Gattung sein.

Der Fall $p = 1$ ist somit vollständig abgethan; und wir setzen demgemäss in Zukunft stets $p \geqq 2$ voraus.

In Bezug auf diesen allgemeinen Fall drängt sich uns bei Berücksichtigung der früheren Ergebnisse und insbesondere der beiden Resultate des vorigen Paragraphen die Vermuthung auf, dass es wegen der geforderten eindeutigen Umkehrbarkeit des Systems (I) möglich sein wird, durch Wahl eines Constantensystems

$$\begin{pmatrix} C_{11}, & C_{12}, & \ldots & C_{1p} \\ C_{21}, & C_{22}, & \ldots & C_{2p} \\ — & — & — & — \\ C_{p1}, & C_{p2}, & \ldots & C_{pp} \end{pmatrix}$$

p durch die Gleichnngen

$$(4)\quad \varphi_\lambda(x,y) = C_{\lambda 1} R_1(x,y) + C_{\lambda 2} R_2(x,y) + \ldots + C_{\lambda p} R_p(x,y) \quad (\lambda = 1,2,\ldots p)$$

definierte rationale Funktionen $\varphi_\lambda(x, y)$ von x und y zu bilden, welche nach Analogie des soeben erledigten Falles $p = 1$ folgende Eigenschaften besitzen:

1. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2p} \\ — & — & — & — \\ C_{p1} & C_{p2} & \ldots & C_{pp} \end{vmatrix}$$

hat einen von Null verschiedenen Werth.

2. Die Funktionen $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ werden an sämmtlichen Verzweigungsstellen der Riemann'schen Fläche unendlich gross und zwar mit einer Ordnungszahl, die mindestens der Ordnungszahl des betreffenden Verzweigungspunktes gleich ist.

3. Die Funktionen $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ verschwinden für $x = \infty$ in keinem Blatte der Riemann'schen Fläche mit einer Ordnungszahl, die mehr als 2 beträgt.

4. Sind $(x, y) = (a_i^{(\lambda)}, b_i^{(\lambda)})$ $(i = 1, 2, \ldots \tau_\lambda)$ die sämmtlichen von einander verschiedenen im Endlichen gelegenen, d. h. zu einem endlichen $x = a_i^{(\lambda)}$ gehörigen Nullstellen von $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$, so fallen die Grössen $a_i^{(\lambda)}\binom{i = 1, 2, \ldots \tau_\lambda}{\lambda = 1, 2, \ldots p}$ mit keiner der Grössen $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots x_0^{(h)}$ zusammen, wenn diese in irgend einer Reihenfolge die sämmtlichen endlichen Werthe von x bezeichnen, für welche die irreducible algebraische Gleichung $F(x, y) = o$ zwei oder mehr einander gleiche Wurzeln liefert, oder für welche Null- oder Unendlichkeitsstellen von irgend einer der $p + 1$ Funktionen y, $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$, $\ldots R_p(x, y)$ existieren.

5. Die Funktionen $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ verschwinden an den Stellen $(x, y) = (a_i^{(\lambda)}, b_i^{(\lambda)})$ $(i = 1, 2, \ldots \tau_\lambda)$ genau mit der Ordnungszahl 1.

6. Es ist $\tau_\lambda \geq p - 1$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ und es sind hinsichtlich jeder der Funktionen $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ die ersten $p - 1$ Stellen $(x, y) = (a_i^{(\lambda)}, b_i^{(\lambda)})$ $(i = 1, 2, \ldots p-1)$ so beschaffen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} R_1(a_1^{(\lambda)}, b_1^{(\lambda)}), & R_1(a_2^{(\lambda)}, b_2^{(\lambda)}), & \ldots & R_1(a_{p-1}^{(\lambda)}, b_{p-1}^{(\lambda)}) \\ R_2(a_1^{(\lambda)}, b_1^{(\lambda)}), & R_2(a_2^{(\lambda)}, b_2^{(\lambda)}), & \ldots & R_2(a_{p-1}^{(\lambda)}, b_{p-1}^{(\lambda)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{p-1}(a_1^{(\lambda)}, b_1^{(\lambda)}), & R_{p-1}(a_2^{(\lambda)}, b_2^{(\lambda)}), & \ldots & R_{p-1}(a_{p-1}^{(\lambda)}, b_{p-1}^{(\lambda)}) \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt, der wegen der Eigenschaften 4. offenbar ein endlicher ist.

Existiert wirklich ein System von Funktionen $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, . . . $\varphi_p(x, y)$, das die eben genannten 6 Eigenschaften sämmtlich besitzt, so wollen wir dasselbe ein System typischer Funktionen, oder kurz ein typisches System nennen.

Nehmen wir nun für einen Augenblick vorgreifend an, die Existenz eines solchen typischeu Systems wäre bewiesen, so würden sich für jede seiner Funktionen $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$, wenn wir unter N_λ, U_λ resp. die Anzahl der ihrer Ordnungszahl entsprechend oft gezählten Null- und Unendlichkeitsstellen von $\varphi_\lambda(x, y)$ verstehen, aus den definierenden Eigenschaften die Relationen

$$(5)\begin{cases} N_\lambda \leqq 2\ m + \tau_\lambda \\ U_\lambda \geqq \omega \end{cases}$$

ergeben, wo ω wieder dieselbe Bedeutung hat wie am Anfang dieses Paragraphen. Da nun $N_\lambda = U_\lambda$ und überdies nach Gleichung (1) $\omega = 2\ m + 2\ (p - 1)$ sein muss, so geht (5) über in

$$(6)\begin{cases} N_\lambda \leqq 2\ m + \tau_\lambda \\ N_\lambda \geqq 2\ m + 2\ (p - 1) \end{cases}$$

woraus $2\ m + 2\ (p - 1) \leqq 2\ m + \tau_\lambda$ folgt.

Mithin müssen in Bezug auf jedes typische System für die Zahlen τ_λ nothwendig die Relationen bestehen

$$(7) \qquad \tau_\lambda \geqq 2\ (p - 1)\ (\lambda = 1, 2, \ldots p).$$

Wäre nun die Beziehung $\tau_\lambda > 2\ (p - 1)$ mit der eindeutigen Umkehrbarkeit von (I) vereinbar, so könnte $\varphi_\lambda(x, y)$ kein Integrand 1. Gattung sein; denn als solcher dürfte $\varphi_\lambda(x, y)$, wie bekannt, nur in den Verzweigungsstellen und zwar höchstens mit der Ordnungszahl der Verzweigung unendlich werden und müsste überdies für $x = \infty$ in allen Blättern mindestens mit der Ordnungszahl 2 verschwinden, woraus sich die Relationen $\begin{cases} N_\lambda \geqq 2\ m + \tau_\lambda \\ U_\lambda \leqq \omega \end{cases}$ er-

gäben, die für $\tau_\lambda > 2\,(p-1)$ wegen $\begin{cases} \omega = 2m + 2\,(p-1) \\ N_\lambda = U_\lambda \end{cases}$ zu dem Widerspruch $\begin{cases} N_\lambda \geqq 2m + \tau_\lambda \\ N_\lambda < 2m + \tau_\lambda \end{cases}$ führen würden. Folglich könnten in dem betrachteten Falle $\tau_\lambda > 2\,(p-1)$ auch die Funktionen $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$, . . . $R_p(x, y)$ nicht sämmtlich Integranden 1. Gattung sein; denn sonst müsste dies wegen (4) auch mit sämmtlichen $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ der Fall sein. Der Satz, dessen Beweis der Gegenstand dieser Untersuchung ist, kann daher nur dann richtig sein, wenn sich die Beziehungen $\tau_\lambda = 2\,(p-1)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ als nothwendige herausstellen. Ist aber letzteres der Fall, so ist die Richtigkeit dieses fraglichen, in der Einleitung angekündigten Satzes in der That vollständig erwiesen. Denn aus $\tau_\lambda = 2\,(p-1)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ folgt wegen (6) dass $N_\lambda = 2m + 2\,(p-1)$ und folglich wegen $\begin{cases} U_\lambda = N_\lambda \\ 2m + 2\,(p-1) = \omega \end{cases}$ $U_\lambda = \omega$ sein muss; und hieraus, d. h. aus den beiden Relationen

$$\begin{cases} N_\lambda = 2m + \tau_\lambda \\ U_\lambda = \omega \end{cases}$$

kann dann sofort mit Hülfe der definierenden Eigenschaften des typischen Systems folgendes geschlossen werden:

Ist $(x, y) = (a, b)$ irgend eine Verzweigungsstelle der Riemann'schen Fläche, so wird, wenn man ihre Ordnungszahl mit $\alpha - 1$ bezeichnet, $\varphi_\lambda(x, y)$ an dieser Stelle genau $(\alpha - 1)$ter Ordnung unendlich.

Ist $(x, y) = (x_0, y_0)$ irgend eine im Endlichen gelegene Stelle, in der keine Verzweigung stattfindet, so besitzt $\varphi_\lambda(x_0, y_0)$ einen endlichen Werth.

Ist $(x, y) = (\infty, y_\infty)$ irgend eine der m im Unendlichen gelegenen Stellen der Riemann'schen Fläche, so verschwindet $\varphi_\lambda(x, y)$ genau zweiter Ordnung an dieser Stelle.

Aus diesen Eigenschaften folgt aber in genau derselben Weise, wie dies im Falle $p = 1$ am Anfang dieses Paragraphen für die Funktion $R_1(x, y)$ gezeigt wurde, dass $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ nothwendig sämmtlich Integranden 1. Gattung sein müssen. Da nun wegen

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2p} \\ — & — & — & — \\ C_{p1} & C_{p2} & \ldots & C_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

sich aus (4) eindeutig die Umkehrung

$$R_\lambda(x, y) = A_{\lambda 1}\varphi_1(x, y) + A_{\lambda 2}\varphi_2(x, y) + \ldots + A_{\lambda p}\varphi_p(x, y)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

ergiebt, worin das System der Constanten A das reciproke System zu dem System der C ist, so müssen auch $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$, $\ldots R_p(x, y)$ sämmtlich Integranden erster Gattung sein, womit also, da diese Funktionen nach § 1 bereits als linear unabhängig festgestellt worden waren, unser Satz vollständig erwiesen wäre.

Es erübrigt also zur Vervollständigung dieses Beweises nur noch zu zeigen, dass wegen der geforderten eindeutigen Umkehrbarkeit der Gleichungen (I) ein typisches System existiert, und dass für dasselbe nothwendig die Beziehungen $\varkappa_\lambda = 2(p - 1)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ bestehen müssen.

Die Darlegung der Richtigkeit dieser beiden Sätze wird den Gegenstand der folgenden Paragraphen bilden.

§ 6.

Dem Existenzbeweise typischer Systeme schicken wir folgenden leicht zu erweisenden Hülfssatz voraus:

Ist irgend eine endliche Anzahl n von nicht identisch verschwindenden ganzen rationalen Funktionen

$$G_\lambda(x_1, x_2, \ldots x_r) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots p)\,.$$

einer beliebigen Zahl von Variablen $x_1, x_2, \ldots x_r$ gegeben,

und sind für letztere in der complexen Ebene r kreisförmige Gebiete K_1, K_2, . . . K_r, die auch ganz oder theilweise zusammenfallen können, von beliebig kleiner, aber endlicher Ausdehnung willkürlich vorgeschrieben, so lassen sich stets endliche Werthsysteme x_1, x_2, . . . x_r, in denen x_λ im Inneren von K_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots r)$ gewählt ist, so bestimmen, dass für diese sämmtliche Funktionen

$$G_\lambda (x_1, x_2, \ldots x_r) \; (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

von Null verschiedene und natürlich auch endliche Werthe annehmen:

Da die Richtigkeit dieses Satzes im Fall $r = 1$, wo die Funktionen G_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ zusammen nur eine endliche Anzahl von Nullstellen besitzen, für jedes beliebige n unmittelbar ersichtlich ist, so nehmen wir an, der Satz sei für irgend ein $r = l$ bereits bewiesen. Daher lassen sich, wenn wir die Funktionen $G_\lambda (x_1, x_2, \ldots x_l, x_{l+1})(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ nach Potenzen von x_{l+1} ordnen und demgemäss als Coefficienten ganze rationale Funktionen $g (x_1, x_2, \ldots x_l)$ erhalten x_1, x_2, . . . x_l resp. innerhalb K_1, K_2, . . . K_l so wählen, dass diese Coefficienten in keiner der Funktionen $G_\lambda (x_1, x_2, \ldots x_l, x_{l+1})$ sämmtlich verschwinden; denn verschwänden in einer dieser Funktionen alle $g (x_1, x_2, \ldots x_l)$ identisch, so müsste auch diese Funktion selbst, entgegengesetzt der Voraussetzung identisch Null sein. Nach dieser Wahl besitzen dann die Funktionen G_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ wiederum nur eine endliche Anzahl von Nullstellen, so dass man, x_{l+1} mit Vermeidung der letzteren in K_{l+1} wählend, offenbar der Forderung Genüge leisten kann; der Satz gilt also auch für $r = l + 1$ und ist somit, da er, wie wir sahen, für $r = 1$ richtig ist, durch vollständige Induction allgemein bewiesen.

Nunmehr zeigen wir, dass wegen der geforderten eindeutigen Umkehrbarkeit der Gleichungen (I) folgender Satz I. gilt:

I. Es lässt sich stets eine endliche Anzahl n_1 von nicht identisch verschwindenden ganzen rationalen Funktionen

g_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n_1)$ der Variablen $\begin{cases} C_{12}, & C_{13}, & \ldots & C_{1p} \\ C_{22}, & C_{23}, & \ldots & C_{2p} \\ — & — & — & — \\ C_{p2}, & C_{p3}, & \ldots & C_{pp} \end{cases}$ und,

nachdem für letztere in irgend einer Weise endliche Werthe so gewählt sind, dass sämmtliche g_λ endliche, von Null verschiedene Werthe haben, eine weitere endliche Anzahl n_2 von nicht identisch verschwindenden ganzen rationalen Funktionen $G_i\,(C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1})$ $(i = 1, 2, \ldots n_2)$ derart bestimmen, dass, wenn man nun auch beliebig $C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}$ im Endlichen so wählt, dass die G_i nicht verschwinden, die durch

$$(1)\quad \varphi_\lambda\,(x, y) = C_{\lambda 1}\,R_1\,(x, y) + C_{\lambda 2}\,R_2\,(x, y) + \ldots + C_{\lambda p}\,R_p\,(x, y)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

definierten Funktionen von den 6 im vorigen Paragraphen für typische Systeme aufgestellten Definitionseigenschaften nothwendig die ersten 5 besitzen müssen.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich wie folgt: Bekanntlich ist

$$L_1 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2p} \\ — & — & — & — \\ C_{p1} & C_{p2} & \ldots & C_{pp} \end{vmatrix}$$

eine ganze rationale Funktion der p^2 Grössen $C_{11}, \ldots C_{pp}$, die, da es doch von Null verschiedene Determinanten p^{ten} Grades giebt, nicht identisch verschwindet; $L_1 \neq o$ ist dann die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit die erste der typischen Eigenschaften von den durch (1) definierten Funktionen erfüllt werde.

Ist ferner $(x, y) = (a, b)$ irgend ein Verzweigungspunkt mit der Ordnungszahl $\alpha - 1 \geq 1$, so können die betreffenden Entwickelungen der Funktionen $R_k\,(x, y)$ für $t = (x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ nach dem ersten Resultat des § 4 in der Form

$$R_k(x, y) = \gamma_{sk} t^s + \gamma_{s+1,k} t^{s+1} + \ldots (k = 1, 2, \ldots p)$$

dargestellt werden, worin mindestens einer der Coefficienten γ_{sk} $(k = 1, 2, \ldots p)$ von Null verschieden ist, während für die ganze rationale Zahl s die Relation $s \leqq -(\alpha - 1)$ gilt. Da sich dann für die genannte Umgebung

$$\varphi_\lambda(x, y) = \sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k} R_k(x, y) = t^s \sum_{k=1}^{p} \gamma_{sk} C_{\lambda k} + t^{s+1} \sum_{k=1}^{p} \gamma_{s+1,k} C_{\lambda k} + \ldots$$

ergiebt, so folgt, dass $\sum_{k=1}^{p} \gamma_{sk} C_{\lambda k} \neq o$ die hinreichende Bedingung dafür ist, dass φ_λ an der Stelle (a, b) mindestens mit der Ordnungszahl der Verzweigung unendlich gross wird; nun ist aber die linke Seite dieser Ungleichung wegen der nicht sämmtlich verschwindenden γ_{sk} eine nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktion von $C_{\lambda 1}, C_{\lambda 2}, \ldots C_{\lambda p}$, die also *a fortiori* auch als nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktion sämmtlicher p^2 Grössen $C_{11}, \ldots C_{pp}$ betrachtet werden kann; denken wir uns daher die analogen Funktionen für sämmtliche $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ und für sämmtliche Verzweigungspunkte gebildet und in irgend einer Reihenfolge mit $L_2, L_3, \ldots L_{\nu_1}$ bezeichnet, so sind L_i $(i = 1, 2, \ldots \nu_1)$ nicht identisch verschwindend ganze rationale Funktionen von $C_{11}, \ldots C_{pp}$ derart, dass, wenn die Ungleichungen $L_i \neq o$ $(i = 1, 2, \ldots \nu_1)$ für endliche Werthe von $C_{11}, \ldots C_{pp}$ erfüllt sind, das Funktionensystem $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ nothwendig die ersten beiden typischen Eigenschaften besitzen muss.

Jetzt sei $(x, y) = (\infty, y_\infty)$ irgend eine der m im Unendlichen gelegenen Stellen, so dass daselbst für $t = \frac{1}{x}$, wie aus dem zweiten Resultat des § 4 hervorgeht, Entwickelungen von der Form

$$R_k(x, y) = \beta_{sk} t^s + \beta_{s+1,k} t^{s+1} + \ldots (k = 1, 2, \ldots p)$$

bestehen, worin wiederum die ersten Coefficienten $\beta_{s1}, \beta_{s2}, \ldots \beta_{sp}$

nicht sämmtlich verschwinden, während für die ganze rationale Zahl s hier die Relation $s \leqq 2$ besteht; es wird also

$$\varphi_\lambda(x,y)=\sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k} R_k(x,y)=t^s\sum_{k=1}^{p}\beta_{sk}C_{\lambda k}+t^{s+1}\sum_{k=1}^{p}\beta_{s+1,k}C_{\lambda k}+\ldots$$

an der genannten Stelle sicher mit keiner höheren Ordnungszahl als 2 verschwinden, wenn $\sum_{k=1}^{p}\beta_{sk}C_{\lambda k} \neq o$ ist; wir erhalten somit bei Ausdehnung dieser Betrachtung auf alle Funktionen $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ und auf sämmtliche m Stellen (∞, y_∞) genau wie vorhin eine weitere endliche Anzahl nicht identisch verschwindender ganzer rationaler Funktionen von $C_{11}, \ldots C_{pp}$ derart, dass, wenn wir sie in irgend einer Reihenfolge mit $L_{\nu_{i-1}+1}, L_{\nu_{i-1}+2}, \ldots L_{\nu_i}$ bezeichnen, alle Funktionen $\varphi_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ die drei ersten typischen Eigenschaften sämmtlich besitzen, falls für $C_{11}, \ldots C_{pp}$ solche endliche Werthe gewählt werden, dass gleichzeitig $L_i \neq o$ $(i = 1, 2, \ldots \nu_2)$ ist.

Endlich seien in irgend einer Reihenfolge $(x, y) = (\xi_0^{(i)}, \eta_0^{(i)})$ $(i = 1, 2, \ldots \mu)$ mit Ausnahme der ja schon berücksichtigten Verzweigungspunkte die sämmtlichen Stellen der Riemann'schen Fläche, welche zu den in § 5 bei Festsetzung der typischen Eigenschaften 4 genannten Werthen $x = x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots x_0^{(h)}$ gehören, so dass diese Stellen, wie aus den Elementen der Theorie der algebraischen Funktionen bekannt ist, sicher nur in endlicher Anzahl vorhanden sind. Da diese Stellen sämmtlich zu endlichen x-Werthen gehören, so können die Funktionen $R_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots p)$ nach § 4 an keiner dieser Stellen gleichzeitig verschwinden; und wir erhalten, wenn (ξ_0, η_0) irgend eine der genannten Stellen ist, die Entwickelungen

$R_k(x, y) = \alpha_{sk}(x-\xi_0)^s + \alpha_{s+1,k}(x-\xi_0)^{s+1} + \ldots (k = 1, 2, \ldots p)$

worin wir wieder eine der Zahlen $\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots \alpha_{sp}$ als von Null verschieden voraussetzen können und dann wissen, dass für die ganze rationale Zahl s hier die Relation $s \leqq o$ besteht; daher wird

$$\varphi_\lambda(x,y)=\sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k} R_k(x,y)=(x-\xi_0)^s \sum_{k=1}^{p} \alpha_{sk} C_{\lambda k}+(x-\xi_0)^{s+1} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{s+1,k} C_{\lambda k}+\ldots$$

an der Stelle (ξ_0, η_0) sicher nicht verschwinden, wenn durch Wahl der $C_{\lambda k}$: $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{sk} C_{\lambda k} \neq o$ bewirkt wird, was stets möglich, da die α_{sk} $(k = 1, 2, \ldots p)$ nicht alle Null sind. Bilden wir daher die der Funktion $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{sk} C_{\lambda k}$ analogen Ausdrücke für alle Stellen $(\xi_0^{(i)}, \eta_0^{(i)})$ und für sämmtliche $\varphi_\lambda (x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ und bezeichnen dieselben in irgend einer Reihenfolge mit $L_{\nu_s+1}, L_{\nu_s+2}, \ldots L_{\nu_s}$, so sind L_i $(i = 1, 2, \ldots \nu_s)$ wohlbestimmte nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktionen von $C_{11}, \ldots C_{pp}$ in endlicher Anzahl, in Bezug auf die jede im Endlichen getroffene Wahl der Werthe $C_{11}, \ldots C_{pp}$, welche gleichzeitig

$$L_i \neq o \ (i = 1, 2, \ldots \nu_s)$$

bewirkt, zur Folge hat, dass die durch (1) definirten Funktionen $\varphi_\lambda (x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ die ersten 4 der 6 typischen Eigenschaften sicher sämmtlich besitzen.

Die Funktionen L_i denken wir uns nun nach Potenzen der Grössen $C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}$ geordnet, so dass sie identisch in

$$(2)\ L_i = G_i (C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}) \ (i = 1, 2, \ldots \nu_s)$$

übergehen, worin die G_i ganze rationale Funktionen von $C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}$ sind, deren Coefficienten sich als ganze rationale Funktionen g der Grössen

$$(3)\begin{cases} C_{12}, & C_{13}, & \ldots & C_{1p} \\ C_{22}, & C_{23}, & \ldots & C_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p2}, & C_{p3}, & \ldots & C_{pp} \end{cases}$$

ergeben. Wegen des nicht identischen Verschwindens der

L_i müssen in jeder der Funktionen G_i unter den Coefficienten g nothwendig solche vorkommen, die nicht identisch verschwinden; diese denken wir uns in irgend einer Reihenfolge mit $g_1, g_2, \ldots g_q$ bezeichnet, so dass $q \geqq \nu_3$ ist. Zu ihnen fügen wir die Grössen (3) selbst, indem wir postulieren, dass sie alle von Null verschieden sein sollen, als weitere offenbar nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktionen $g_{q+1}, g_{q+2}, \ldots g_{q+r(p-1)}$ der Grössen (3) hinzu; so dass wir, indem wir $n_1 = q + p\,(p-1)$ setzen, die in der Behauptung bezeichneten n_1 nicht identisch verschwindenden ganzen rationalen Funktionen g_λ $(\lambda = 1,2,\ldots n_1)$ erhalten.

Nun denken wir uns, was nach dem am Anfang dieses Paragraphen bewiesenen Hülfssatz stets möglich ist, für die Grössen (3), irgend welche endliche Werthe so gewählt, dass die g_λ sämmtlich von Null verschiedene und natürlich auch endliche Werthe erhalten. Nach dieser Wahl, bei der sich für die Grössen (3) lauter von Null verschiedene Werthe ergeben, sind dann die Funktionen

$$G_i\,(C_{11},\ C_{21},\ \ldots\ C_{p1})\ (i = 1,\ 2,\ \ldots\ \nu_3)$$

sämmtlich nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktionen von $C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}$ allein.

Betrachten wir dann die nunmehr bereits fixierten Funktionen

$$\chi_\lambda(x,y) = -\frac{[C_{\lambda 2} R_2(x,y) + C_{\lambda 3} R_3(x,y) + \ldots + C_{\lambda p} R_p(x,y)]}{R_1(x,y)}$$
$$(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ p)$$

und deren Ableitungen $\dfrac{d\,\chi_\lambda^{\mathfrak{1}}(x,y)}{d\,x}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$, so sind dies sämmtlich rationale Funktionen von x und y, also algebraische Funktionen von x, die nicht identisch verschwinden können; denn da die Grössen $C_{\lambda 2}, C_{\lambda 3}, \ldots C_{\lambda p}$ von Null verschieden sind, so würde ein identisches Verschwinden von

$$C_{\lambda 2} R_2(x,y) + C_{\lambda 3} R_3(x,y) + \ldots + C_{\lambda p} R_p(x,y)$$

in Widerspruch mit der linearen Unabhängigkeit der Grössen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ stehen, also können die $\chi_\lambda(x, y)$ nicht identisch Null sein; derselbe Widerspruch ergäbe sich aber auch aus $\chi_\lambda(x, y) = \text{Const.}$ wegen der dann bestehenden identischen Relation

$$\text{Const. } R_1(x,y)+C_{\lambda 2}R_2(x,y)+C_{\lambda 3}R_3(x,y)+\ldots+C_{\lambda p}R_p(x,y)=0.$$

Folglich können auch die $\frac{d\,\chi_\lambda(x, y)}{d\,x}$ nicht identisch verschwinden. Mithin besitzen insbesondere letztere Funktionen sicher nur eine endliche Anzahl von Nullstellen. Bezeichnen wir nun die Werthe, die die Funktionen $\chi_\lambda(x, y)$ an diesen Stellen, sowie an den Unendlichkeitsstellen von $R_1(x, y)$ annehmen, insoweit diese Werthe nicht unendlich gross sind, in irgend einer Reihenfolge mit $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\sigma$ und fügen den obigen Funktionen

$$G_i(C_{11}, C_{21}. \ldots C_{p1}) \quad (i = 1, 2, \ldots \nu_3)$$

als weitere offenbar ebenfalls nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktionen von $C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}$ die Funktionen $C_{\lambda 1} - \delta_k \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots \sigma \end{pmatrix}$ hinzu, die wir wiederum der Reihe nach mit

$$G_{\nu_3+1}(C_{11},C_{21},\ldots C_{p1}), G_{\nu_3+2}(C_{11},C_{21},\ldots C_{p1}),\ldots G_{\nu_3+p\sigma}(C_{11},C_{21},\ldots C_{p1})$$

bezeichnen, so wissen wir, dass nach jeder im Endlichen getroffenen Wahl von $C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}$, für welche die zuletzt angeführten Funktionen von Null verschieden sind, die Funktionen $\chi_\lambda(x, y) - C_{\lambda 1}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ nur an solchen Stellen verschwinden können, welche weder Nullstellen von $\frac{d\,\chi_\lambda(x, y)}{dx}$ noch Unendlichkeitsstellen von $R_1(x, y)$ sind. Wir setzen nun $\nu_3 + p\,\sigma = n_3$ und denken uns die Grössen $C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}$, was nach dem Hülfssatze stets möglich ist, irgend wie im Endlichen so gewählt, dass sämmtliche Funktionen $G_i(C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1})(i=1,2, \ldots n_3)$ von Null verschieden und natürlich endliche Werthe haben; da dann wegen (2) auch die Funktionen L_i $(i = 1, 2, \ldots \nu_3)$

alle von Null verschieden sind, so besitzen die Funktionen $\varphi_\lambda(x,y)=C_{\lambda 1}R_1(x,y)+C_{\lambda 2}R_2(x,y)+\ldots+C_{\lambda p}R_p(x,y)(\lambda=1,2,\ldots p)$, wie bereits gezeigt wurde, die 4 ersten typischen Eigenschaften, während ausserdem die Funktionen

$$\chi_\lambda(x,\ y) - C_{\lambda 1}\ (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ p)$$

nur an solchen Stellen verschwinden können, wo $R_1\ (x,\ y)$ einen endlichen Werth hat und wo gleichzeitig $\dfrac{d\,\chi_\lambda\ (x,\ y)}{dx}$ von Null verschieden ist. Hieraus folgt aber sofort, dass die Gesammtheit der im Endlichen gelegenen Nullstellen $(x,\ y) = (a_i^{(\lambda)},\ b_i^{(\lambda)})\ (i = 1,\ 2,\ \ldots\ \tau_\lambda)$ von $\varphi_\lambda\ (x,\ y)$ identisch ist mit der Gesammtheit der im Endlichen gelegenen Nullstellen von $\chi_\lambda\ (x,\ y) - C_{\lambda 1}$; denn da

$$\varphi_\lambda\ (x,\ y) = -\ R_1\ (x,\ y)\ [\chi_\lambda\ (x,\ y) - C_{\lambda 1}]$$

ist, so folgt, dass überall wo $\chi_\lambda\ (x,\ y) - C_{\lambda 1}$ im Endlichen verschwindet wegen des dort endlichen Werthes von $R_1(x,y)$ auch $\varphi_\lambda\ (x,\ y)$ verschwinden muss, nur dass umgekehrt auch an allen Stellen $(x,\ y) = (a_i^{(\lambda)},\ b_i^{(\lambda)})\ (i = 1,\ 2,\ \ldots\ \tau_\lambda)$, weil dies wegen der bereits verificierten 4ten typischen Eigenschaft weder Null- noch Unendlichkeitsstellen von $R_1\ (x,\ y)$ sein können, auch $\chi_\lambda\ (x,\ y) - C_{\lambda 1}$ verschwinden muss und zwar genau erster Ordnung; denn diese sämmtlich im Endlichen liegenden Stellen sind als Nullstellen von $\varphi_\lambda\ (x,\ y)$ wegen der 2ten typischen Eigenschaft keine Verzweigungsstellen und als Nullstellen von $\chi_\lambda\ (x,\ y) - C_{\lambda 1}$, wie wir sahen, keine Nullstellen von $\dfrac{d\,\chi_\lambda\ (x,\ y)}{dx} = \dfrac{d\,[\chi_\lambda\ (x,\ y) - C_{\lambda 1}]}{dx}$. Hieraus folgt aber dann weiter, dass die genannten Stellen, weil an ihnen $R_1\ (x,\ y)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt, auch Nullstellen erster Ordnung von

$$\varphi_\lambda\ (x,\ y) = -\ R_1\ (x,\ y)\ [\chi_\lambda\ (x,\ y) - C_{\lambda 1}]$$

sein müssen, und dass die Funktionen $\varphi_\lambda\ (x,\ y)\ (\lambda = 1, 2, \ldots p)$ somit in der That nicht allein die ersten 4, sondern auch die 5te typische Eigenschaft besitzen. Die von uns ge-

bildeten Funktionen $g_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots m_1)$ und $G_i (C_{1i}, C_{2i}, \ldots C_{pi})$ $(i = 1, 2, \ldots n_2)$ erfüllen also die an sie in unserem Satze I gestellten Anforderungen, wodurch der Beweis der Richtigkeit dieses Satzes erbracht ist.

Endlich weisen wir nach, dass sich aus der geforderten eindeutigen Umkehrbarkeit des Gleichungssystems (I) auch die Richtigkeit des nachstehenden Satzes II. ergiebt:

II. Es lassen sich in der complexen Ebene stets p kreisförmige Gebiete $K_1, K_2, \ldots K_p$ von endlicher Ausdehnung so bestimmen, dass für alle Werthesysteme $C_1, C_2, \ldots C_p$, in denen C_i innerhalb K_i $(i = 1, 2, \ldots p)$ gewählt ist, unter den im Endlichen gelegenen Nullstellen der Funktion $\varphi(x,y) = C_1 R_1(x,y) + C_2 R_2(x,y) + \ldots + C_p R_p(x,y)$ sicher $p - 1$ von einander verschiedene Stellen

$$(x, y) = (a_i, b_i) \; (i = 1, 2, \ldots p - 1)$$

existieren, für welche die Determinante

$$\begin{vmatrix} R_1(a_1, b_1), & R_1(a_2, b_2), & \ldots & R_1(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ R_2(a_1, b_1), & R_2(a_2, b_2), & \ldots & R_2(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{p-1}(a_1, b_1), & R_{p-1}(a_2, b_1), & \ldots & R_{p-1}(a_{p-1}, b_{p-1}) \end{vmatrix}$$

einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat.

Zum Beweise berücksichtigen wir, dass sich die Funktionen $R_\lambda (x, y)$ mit Hülfe der zu Grunde gelegten irreduciblen Gleichung $F(x, y) = \sum_{i=0}^{m} y^i \cdot f_i = 0$, worin $f_i = f_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots m)$ ganze rationale Funktionen von x sind, bekanntlich stets in der Form

$$R_\lambda (x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} y^i r_{\lambda i} (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

darstellen lassen, wenn wir unter $r_{\lambda i} \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots m - 1 \\ \lambda = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix}$ entsprechende rationale Funktionen von x allein verstehen. Indem wir diese sämmtlich in Quotienten zweier ganzer

rationaler Funktionen verwandeln und durch Erweiterung auf gleichen Nenner bringen, erhalten wir eine Darstellung

$$R_\lambda(x,y) = \frac{\sum_{i=o}^{m-1} y^i g_{\lambda i}}{g} \quad (\lambda = 1,2,\ldots p),$$

worin $g_{\lambda i} = g_{\lambda i}^{(x)} \begin{pmatrix} i = o, 1, \ldots m-1 \\ \lambda = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix}$ ganze rationale Funktion von x sind, ebenso wie $g = g(x)$, welches wegen der im § 1 bereits bewiesenen Eigenschaften der Funktionen $R_\lambda(x, y)$ sicher nicht identisch verschwindet und daher nur eine endliche Anzahl von Nullstellen besitzt. Wir führen nun $\Phi(x, y)$ durch die Gleichung

$$\varphi(x, y) = \sum_{\lambda=1}^{p} C_\lambda R_\lambda(x, y) = \frac{\Phi(x,y)}{g(x)}$$

ein, so dass sich $\Phi(x, y) = \sum_{i=o}^{m-1} y^i \,.\, p_i$ ergiebt, wenn man $p_i = p_i(x;\ C_1,\ C_2, \ldots C_p)$ als ganze rationale Funktionen von x, C_1, C_2, $\ldots$ C_p durch die Gleichungen

$$p_i = \sum_{\lambda=1}^{p} C_\lambda g_{\lambda i} \quad (i = 0, 1, \ldots m-1)$$

definiert. Ebensowenig wie $g = g(x)$ kann auch die Funktion $f_m = f_m(x)$ als höchster Coefficient der irreduciblen Gleichung m^{ten} Grades identisch verschwinden. Es hat also auch f_m nur eine endliche Anzahl von Nullstellen, welches bekanntlich die einzigen endlichen Werthe von x sind, für die sich Unendlichkeitsstellen der algebraischen Funktion y ergeben. Da der Fall $m = 1$, wie bekannt, für das Geschlecht p den Werth $p = o$ nach sich zieht, so dass in diesem Falle von einem Gleichungssystem (I) gar nicht die Rede sein könnte, so haben wir, zumal wir uns überhaupt nur noch mit $p \geqq 2$ beschäftigen, $m \geqq 2$, also $m - 1 \geqq 1$ anzunehmen und können demgemäss durch

$\Phi_\lambda(x, y) = p_0 + p_1 y + \ldots + p_\lambda y^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots m-1)$ $m-1$ Funktionen definieren, von denen

$$\Phi_{m-1}(x, y) = \Phi(x, y)$$

ist. Ist $\Phi_\lambda(x, y)$ irgend eine dieser Funktionen, so schreiten wir, indem wir

$$\begin{cases} F(x, y) = f_0 + f_1 . y + \ldots + f_m y^m \\ \Phi_\lambda(x, y) = p_0 + p_1 y + \ldots + p_\lambda y^\lambda \end{cases}$$

als Funktionen von y allein betrachten, nunmehr zur Bildung der Resultante S_λ von $F(x, y)$ und $\Phi_\lambda(x, y)$. Da jedoch die Coefficienten dieser Funktionen variable Grössen sind, die, sei es identisch, sei es für gewisse Werthesysteme $x, C_1, C_2, \ldots C_p$ verschwinden können, so sind die aus den Elementen der Algebra bekannten Resultantensätze hier nicht ohne Weiteres anwendbar und es erscheint daher angezeigt, hier etwas näher auf die Bildung von S_λ sowie auf den Beweis der letztgenannten Sätze einzugehen.

Da insbesondere die höchsten Coefficienten f_m, p_λ, letzterer sogar identisch, verschwinden können, so versagt hier der Algorithmus des grössten gemeinsamen Theilers vollständig, und wir müssen uns auf die bekannte Darstellung von S_λ als Determinante beschränken. Zu diesem Zweck geht man bekanntlich von den beiden Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} f_0 + f_1 y + \ldots + f_m y^m = 0 \\ p_0 + p_1 y + \ldots + p_\lambda y^\lambda = 0 \end{cases}$$

aus und bildet, indem man die erste Gleichung succesive mit $1, y, y^2, \ldots y^{\lambda-1}$ und die zweite der Reihe nach mit $1, y, y^2, \ldots y^{m-1}$ multipliciert, hieraus ein System von $\lambda + m$ linearen homogenen Gleichungen für die $\lambda + m$ Grössen $1, y, y^2, \ldots y^{\lambda+m-1}$, woraus sich, da wenigstens die erste von Null verschieden ist, $S_\lambda = o$ als nothwendige Bedingung für das Zusammenbestehen dieser Gleichungen für endliche Werthe von y ergiebt, wenn man

$$(5)\quad S_\lambda = \begin{vmatrix} f_0, f_1, f_2, \ldots f_{\lambda-1}, f_\lambda, & f_{\lambda+1}, \ldots\ldots f_{m-1}, f_m, & 0, & 0, \ldots 0 \\ 0, f_0, f_1, \ldots f_{\lambda-2}, f_{\lambda-1}, f_\lambda, & \ldots\ldots f_{m-2}, f_{m-1}, & f_m, & 0, \ldots 0 \\ \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} & \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} & \text{—} & \text{—} \quad \text{—} \\ 0, 0, 0, \ldots 0, f_0, & f_1, f_2, \ldots\ldots f_{m-\lambda}, & f_{m-\lambda+1}, f_{m-\lambda+2}, & \ldots f_m \\ p_0, p_1, p_2, \ldots p_{\lambda-1}, p_\lambda, & 0, 0, \ldots 0, & 0, 0, & \ldots 0 \\ 0, p_0, p_1, \ldots p_{\lambda-2}, p_{\lambda-1}, p_\lambda, & 0, \ldots 0, & 0, 0, & 0, \ldots 0 \\ \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} & \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} & \text{—} & \text{—} \quad \text{—} \\ 0, 0, 0, \ldots 0, & 0, 0, \ldots 0, p_0, & p_1, p_2 & \ldots p_\lambda \end{vmatrix}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots m-1)$$

definiert. Damit also für ein endliches $x = \xi$ ein endlicher Werth $y = \eta$ existiert, welcher die Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} F(\xi, y) = 0 \\ \Phi(\xi, y) = 0 \end{cases}$$

simultan befriedigt ist unter allen Umständen $(S_{m-1})_{x=\xi} = 0$ eine nothwendige Bedingung.

Es sei jetzt umgekehrt ξ ein endlicher Werth von x, für welchen $(S_{m-1})_{x=\xi} = 0$ ist, und von dem wir voraussetzen, dass er nicht zu den Nullstellen von f_m gehört; verschwinden nun für diesen Werth die Coefficienten $p_0, p_1, \ldots p_{m-1}$ sämmtlich, so ist $\Phi(\xi, y) = 0$ für alle endlichen Werthe von y, also giebt es in diesem Falle sicher endliche Werthe $y = \eta$, für welche die Gleichungen (6) beide erfüllt werden.

Verschwinden $p_1, p_2, \ldots p_{m-1}$ für $x = \xi$, so sind alle Elemente, die die letzten m Zeilen mit den letzten $m - 1 = [(m-1) + m] - m$ Colonnen der Determinante $[(m-1) + m]^{\text{ten}}$ Grades S_{m-1} gemein haben Null, woraus sich nach bekannten Determinantensätzen leicht

$$(S_{m-1})_{x=\xi} = (-1)^{m(m-1)} \left[(f_m)_{x=\xi}\right]^{m-1} \cdot \left[(p_0)_{x=\xi}\right]^{m}$$

ergiebt. Wegen $\begin{cases} (S_{m-1})_{x=\xi} = 0 \\ (f_m)_{x=\xi} \neq 0 \end{cases}$ muss also nothwendig auch

$(p_0)_{x=\xi} = 0$ sein, womit dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt ist.

In beiden bisher betrachteten Fällen ist also $(S_{m-1})_{x=\xi}=0$ hinreichend, damit für ein endliches $y = \eta$ die Gleichungen (6) zusammenbestehen. Wir können daher nunmehr, wenn p_ζ der höchste der Coefficienten $p_0, p_1, \ldots p_{m-1}$ ist, welcher für $x = \xi$ nicht verschwindet, $\zeta \geqq 1$ voraussetzen. Aus (5) ergiebt sich nun durch Entwickelung nach den Elementen der letzten Colonne, dass

$$(S_\lambda)_{p_\lambda=0} = (-1)^m f_m \cdot S_{\lambda-1} \quad (\lambda = 2, 3, \ldots m-1)$$

ist; durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel gelangt man leicht zu dem weiteren Resultat:

$$(S_\lambda)_{p_\lambda=p_{\lambda-1}=\ldots=p_{\lambda-k+1}=0} = (-1)^{km} \cdot f_m^k \cdot S_{\lambda-k}\begin{pmatrix}\lambda=k+1,k+2,\ldots m-1\\ k=1,2,\ldots \lambda-1\end{pmatrix};$$

nach unserer jetzigen Annahme ergiebt sich also

$$(7)\quad (S_{m-1})_{x=\xi} = (-1)^{m[m-(\zeta+1)]} \cdot [(f_m)_{x=\xi}]^{m-(\zeta+1)} \cdot (S_\zeta)_{x=\xi}.$$

Da f_m, p_ζ für $x = \xi$ nicht verschwinden und desshalb auch für alle x in einer gewissen Umgebung dieser Stelle von Null verschieden sind, so sind $F(x, y)$, $\Phi_\zeta(x, y)$, wenn wir uns für einen Augenblick auf diese Umgebung beschränken, ganze rationale Funktionen genau m^{ten} resp. ζ^{ten} Grades von y und besitzen demgemäss für jedes beliebige x des betrachteten Bereiches genau m resp. ζ endliche Nullstellen $y = y_1, y_2, \ldots y_m$, beziehungsweise $y = u_1, u_2, \ldots u_\zeta$, so dass sich

$$(8)\quad \begin{cases} F(x,y)=f_0+f_1y+\ldots+f_my^m=f_m(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_m) \\ \Phi_\zeta(x,y)=p_0+p_1y+\ldots+p_\zeta y^\zeta=p_\zeta(y-u_1)(y-u_2)\ldots(y-u_\zeta) \end{cases}$$

ergiebt. Multiplicieren wir daher die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^{m+\zeta-1} \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \dots & u_2^{m+\zeta-1} \\ — & — & — & & — \\ 1 & u_\zeta & u_\zeta^2 & \dots & u_\zeta^{m+\zeta-1} \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{m+\zeta-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{m+\zeta-1} \\ — & — & — & & — \\ 1 & y_m & y_m^2 & \dots & y_m^{m+\zeta-1} \end{vmatrix}$$

mit der durch (5) definierten Determinante S_ζ, so erhält man bei Composition von Zeilen mit Zeilen wegen (8) das Resultat

$$S_\zeta . \Delta = \begin{vmatrix} F(x,u_1), F(x,u_2), \dots F(x.u_\zeta), F(x,y_1), F(x,y_2), \dots F(x,y_m) \\ u_1F(x,u_1), u_2(F(x,u_2), \dots u_\zeta F(x,u_\zeta), y_1F(x,y_1), y_2F(x,y_2), \dots y_mF(x,y_m) \\ — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \\ u_1^{\zeta-1}F(x,u_1), u_2^{\zeta-1}F(x,u_2), \dots u_\zeta^{\zeta-1}F(x,u_\zeta), y_1^{\zeta-1}F(x,y_1), y_2^{\zeta-1}F(x,y_2), \dots y_m^{\zeta-1}F(x,y \\ \Phi_\zeta(x,u_1), \Phi_\zeta(x,u_2), \dots \Phi_\zeta(x,u_\zeta), \Phi_\zeta(x,y_1), \Phi_\zeta(x,y_2), \dots \Phi_\zeta(x,y \\ u_1\Phi_\zeta(x,u_1), u_2\Phi_\zeta(x,u_2), \dots u_\zeta\Phi_\zeta(x,u_\zeta), y_1\Phi_\zeta(x,y_1), y_2\Phi_\zeta(x,y_2), \dots y_m\Phi_\zeta(x,y \\ — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \\ u_1^{m-1}\Phi_\zeta(x,u_1), u_2^{m-1}\Phi_\zeta(x,u_2), \dots u_\zeta^{m-1}\Phi_\zeta(x,u_\zeta), y_1^{m-1}\Phi_\zeta(x,y_1), y_2^{m-1}\Phi_\zeta(x,y_2), \dots y_m^{m-1}\Phi_\zeta(x \end{vmatrix}$$

Da nun in dieser Determinante wegen (8) alle Elemente, welche die ersten ζ Zeilen mit den letzten m Colonnen gemein haben, verschwinden, so ergiebt sich leicht, dass

$$S_\zeta . \Delta = F(x,u_1)F(x,u_2) \dots F(x,u_\zeta) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_\zeta \\ — & — & & — \\ u_1^{\zeta-1} & u_2^{\zeta-1} & \dots & u_\zeta^{\zeta-1} \end{vmatrix} \Phi_\zeta(x,y_1).\Phi_\zeta(x,y_2) \dots \Phi_\zeta(x,y_m) \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots \\ y_1 & y_2 \dots \\ — & — \\ y_1^{m-1} & y_2^{m-1} \dots \end{vmatrix}$$

ist. Denkt man sich hierin die beiden Determinanten der rechten Seite als Differenzenprodukte dargestellt und berücksichtigt, dass wegen (8)

$$\Phi_\zeta(x,y_1).\Phi_\zeta(x,y_2) \dots \Phi_\zeta(x,y_m) = p_\zeta^m . \prod_{i=1}^{m} [(y_i - u_1)(y_i - u_2) \dots (y_i - u_\zeta)]$$

ist, so ergiebt der Vergleich mit dem Differenzenprodukt Δ, wie leicht ersichtlich, das Resultat:

$$(9)\quad S_\zeta . \Delta = p_\zeta^m F(x,u_1)F(x,u_2)\ldots F(x,u_\zeta).\Delta.(-1)^{\frac{m(m-1)+\zeta(\zeta-1)}{2}}$$

Da diese letzte Gleichung ohne jede Voraussetzung über die Coefficienten $f_0, f_1, \ldots f_m, p_0, p_1, \ldots p_\zeta$, wofern nur f_m, p_ζ von Null verschieden waren, abgeleitet wurde, so muss sie auch ganz allgemein bestehen bleiben, wenn man in (8) f_m, p_ζ als unbestimmte von Null verschiedene Parameter und $u_1, u_2, \ldots u_\zeta, y_1, y_2, \ldots y_m$ als unabhängige Variable auffasst, die wir in genügend kleinen Umgebungen von beliebig, aber verschieden von einander gewählten Stellen

$$u_\mu = u_\mu^{(0)}\ (\mu = 1, 2, \ldots \zeta),\ y_\nu = y_\nu^{(0)}\ (\nu = 1, 2, \ldots m)$$

betrachten. Da dann in jedem, in diesen Bereichen gewählten Werthesystem $u_1, u_2, \ldots u_\zeta, y_1, y_2, \ldots y_m$ keine zwei dieser Grössen einander gleich werden, also das Differenzenprodukt Δ hier überall von Null verschieden ist, so reduciert sich (9) auf

$$(10)\quad S_\zeta = p_\zeta^m . F(x,u_1) . F(x,u_2) \ldots F(x,u_\zeta) . (-1)^{\frac{m(m-1)+\zeta(\zeta-1)}{2}}.$$

Nun sind aber bei dieser Auffassung die Coefficienten $p_0, p_1, \ldots p_\zeta, f_0, f_1, \ldots f_m$ bekanntlich ganze rationale Funktionen von $u_1, u_2, \ldots u_\zeta, y_1, y_2, \ldots y_m$; so dass sich sowohl S_ζ vermöge der Definition (5), als auch die rechte Seite der Gleichung (10) wegen (8) als ganze rationale Funktion der unabhängigen Variablen $u_1, u_2, \ldots u_\zeta, y_1, y_2, \ldots y_m$ ergiebt; da nun diese beiden Funktionen innerhalb der betrachteten Bereiche vermöge der Gleichung (10) durchweg übereinstimmen, so muss diese Gleichung nach den Elementen der Funktionentheorie eine identische sein, d. h. es müssen die entsprechenden Coefficienten rechts und links übereinstimmen, womit die Allgemeingültigkeit der Gleichung (10) für alle Fälle, wo p_ζ, f_m von

Null verschieden sind, dargethan ist. Wegen dieser Gleichung geht daher (7) über in

$$(11)\quad (S_{m-1})_{x=\xi} = (-1)^{\frac{m[m-(\zeta+1)]}{2}} \cdot [(f_m)_{x=\xi}]^{m-(\zeta+1)} [(p_\zeta)_{x=\xi}]^{m} F(\xi,\eta_1).F(\xi,\eta_2)...F(\xi,\eta_\zeta).(-1)^{\frac{m(m-1)+\zeta(\zeta+1)}{2}},$$

wo $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\zeta$ die endlichen Werthe bezeichnen, die die Wurzeln $u_1, u_2, \ldots u_\zeta$ der Gleichung $\Phi_\zeta(x, y) = 0$ für $x = \xi$ annehmen; da nun $(S_{m-1})_{x=\xi} = 0$ vorausgesetzt wurde, während $(f_m)_{x=\xi}$ und $(p_\zeta)_{x=\xi}$ von Null verschieden sind, so folgt aus (11), dass mindestens eine der Grössen $F(\xi, \eta_1)$, $F(\xi, \eta_2)$, $\ldots$ $F(\xi, \eta_\zeta)$, die wir mit $F(\xi, \eta)$ bezeichnen wollen, verschwinden muss; da ferner η als Wurzel der Gleichung

$$\Phi_\zeta(\xi, y) = (p_0)_{x=\xi} + (p_1)_{x=\xi} y + \ldots + (p_\zeta)_{x=\xi} y^\zeta = 0$$

nach der gemachten Voraussetzung, wonach

$$(p_{\zeta+1})_{x=\xi} = (p_{\zeta+2})_{x=\xi} = \ldots = (p_{m-1})_{x=\xi} = 0$$

ist, nothwendig auch eine Wurzel der Gleichung

$$\Phi(\xi, y) = (p_0)_{x=\xi} + (p_1)_{x=\xi} y + \ldots + (p_{m-1})_{x=\xi} y^{m-1} = 0$$

sein muss, so sehen wir, dass in der That auch in diesem allgemeinen Falle wegen $(S_{m-1})_{x=\xi} = 0$ ein endliches $y = \eta$ vorhanden sein muss, das beiden Gleichungen $\begin{cases} F(\xi, y) = 0 \\ \Phi(\xi, y) = 0 \end{cases}$ genügt.

Wir haben also folgendes Ergebniss:

Die durch (5) definierte Resultante $S_{m-1} = S = S(x; C_1, C_2 \ldots C_p)$ von $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$ ist eine ganze rationale Funktion von x, C_1, C_2, $\ldots$ C_p von der Beschaffenheit, dass für jedes endliche $x = \xi$, das keine Nullstelle von $f_m = f_m(x)$ ist, $(S)_{x=\xi} = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass ein endliches $y = \eta$ existiert, welches die Gleichungen $\begin{cases} F(\xi, y) = 0 \\ \Phi(\xi, y) = 0 \end{cases}$ beide befriedigt.

Mithin kann $S(x;\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_p)$ nur dann identisch d. h. für alle x verschwinden, wenn $C_1 = C_2 = \ldots = C_p = 0$ gewählt ist. Ist nämlich identisch $S = 0$, so folgt nach dem eben gefundenen Satze, dass es nach Ausschluss der Nullstellen von $f_m(x)$ und $g(x)$ noch unendlich viele Werthe $x = \xi$ giebt, für welche ein die Gleichungen $\begin{cases} F(\xi,\ y) = 0 \\ \Phi(\xi,\ y) = 0 \end{cases}$ simultan befriedigender endlicher Werth $y = \eta$ auffindbar ist; es würde also wegen $g(\xi) \neq 0$ die Funktion

$$\varphi(x,\ y) = \sum_{\lambda=1}^{p} C_\lambda R_\lambda(x,\ y) = \frac{\Phi(x,\ y)}{g(x)}$$

unendlich viele Nullstellen $(\xi,\ \eta)$ in der Riemann'schen Fläche besitzen und müsste folglich identisch verschwinden; und hierzu ist wegen der linearen Unabhängigkeit der $R_\lambda(x,\ y)$ $(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ p)$ in der That $C_1 = C_2 = \ldots = C_p = 0$ erforderlich.

Sind nun $x = \xi_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ l)$ in irgend einer Reihenfolge alle diejenigen Werthe von x, für die sich Unendlichkeitsstellen der Funktionen $R_\lambda(x,\ y)$ $(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ p)$ oder Verzweigungsstellen ergeben, oder für welche $g(x)$ oder $f_m(x)$ verschwinden, so bestimmen wir jetzt, was nach dem zweiten im § 1 bewiesenen Determinantensatz stets möglich ist, $p - 1$ endliche Werthe $x = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{p-1}$, die von einander und von ξ_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ l)$ verschieden sind, derart, dass wenn $y = \beta_{\lambda k}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots\ m)$, die wegen $f_m(\alpha_\lambda) \neq 0$ $(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ p-1)$ offenbar endlichen Wurzeln der Gleichung $F(\alpha_\lambda,\ y) = 0$ $(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ p-1)$ sind, die $m(p-1)$ Determinanten

$$A_\sigma = \begin{vmatrix} R_1(\alpha_1,\beta_{1k_1}), & R_1(\alpha_2,\beta_{2k_2}), & \ldots & R_1(\alpha_{p-1},\beta_{p-1,k})_{p-1} \\ R_2(\alpha_1,\beta_{1k_1}), & R_2(\alpha_2,\beta_{2k_2}), & \ldots & R_2(\alpha_{p-1},\beta_{p-1,k})_{p-1} \\ \hline R_{p-1}(\alpha_1,\beta_{1k_1}), & R_{p-1}(\alpha_2,\beta_{2k_2}), & \ldots & R_{p-1}(\alpha_{p-1},\beta_{p-1,k})_{p-1} \end{vmatrix}$$

$$(\sigma = 1,\ 2,\ \ldots\ m\ (p-1))$$

die entstehen, wenn man hierin die Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_{p-1}$ unabhängig von einander alle Werthe 1, 2, . . . m durchlaufen lässt, sämmtlich von Null verschiedene und natürlich auch endliche Grössen sind.

Betrachten wir daher $(x,y)=(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots(x_{p-1},y_{p-1})$ als Stellen der Riemann'schen Fläche, die resp. in den Umgebungen der Stellen $(x,y)=(\alpha_1,\beta_{1k_1}),(\alpha_2,\beta_{2k_2}),(\alpha_{p-1},\beta_{p-1,k_{p-1}})$ unabhängig von einander variabel sind, so erhalten wir, wie leicht ersichtlich, m $(p-1)$ Entwickelungen von der Form:

$$(12)\quad \begin{vmatrix} R_1(x_1,y_1), & R_1(x_2,y_2),\ldots & R_1(x_{p-1},y_{p-1}) \\ R_2(x_1,y_1), & R_2(x_2,y_2),\ldots & R_2(x_{p-1},y_{p-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{p-1}(x_1,y_1), & R_{p-1}(x_2,y_2),\ldots & R_{p-1}(x_{p-1},y_{p-1}) \end{vmatrix} = A_\sigma + A_{\sigma 1}(x_1-\alpha_1)+A_{\sigma 2}(x_2-\alpha_2)+\ldots A_{\sigma,p-1}(x_{p-1}-\alpha_{p-1})+\mathfrak{P}_\sigma$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots m\ (p-1))$$

worin die Coefficienten $A_{\sigma 1}, A_{\sigma 2}, \ldots A_{\sigma,p-1}$ wohlbestimmte endliche Grössen sind, während die Ausdrücke $\mathfrak{P}_\sigma$, beginnend mit den Gliedern zweiter Dimension, nach ganzen positiven Potenzen von $(x_1-\alpha_1), (x_2-\alpha_2), \ldots (x_{p-1}-\alpha_{p-1})$ fortschreiten.

Wir betrachten nun, indem wir z. B. $\beta_\lambda=\beta_{\lambda 1}, (\lambda=1,2,\ldots p-1)$ setzen, die Determinante

$$\begin{vmatrix} R_1(\alpha_1,\beta_1), & R_2(\alpha_1,\beta_1), & \ldots R_p(\alpha_1,\beta_1) \\ R_1(\alpha_2,\beta_2), & R_2(\alpha_2,\beta_2), & \ldots R_p(\alpha_2,\beta_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_1(\alpha_{p-1},\beta_{p-1}), & R_2(\alpha_{p-1},\beta_{p-1}), & \ldots R_p(\alpha_{p-1},\beta_{p-1}) \\ 1, & 1, & \ldots 1 \end{vmatrix}$$

und bezeichnen die in ihr zu den Elementen der letzten Zeile gehörigen Unterdeterminanten resp. mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$, so dass dies lauter endliche Grössen sind, von denen insbesondere

$$\gamma_p = \begin{vmatrix} R_1(\alpha_1, \beta_1), & R_2(\alpha_1, \beta_1), & \ldots & R_{p-1}(\alpha_1, \beta_1) \\ R_1(\alpha_2, \beta_2), & R_2(\alpha_2, \beta_2), & \ldots & R_{p-1}(\alpha_2, \beta_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_1(\alpha_{p-1}, \beta_{p-1}), & R_2(\alpha_{p-1}, \beta_{p-1}), & \ldots & R_{p-1}(\alpha_{p-1}, \beta_{p-1}) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} R_1(\alpha_1, \beta_{11}), & R_1(\alpha_2, \beta_{21}), & \ldots & R_1(\alpha_{p-1}, \beta_{p-1,1}) \\ R_2(\alpha_1, \beta_{11}), & R_2(\alpha_2, \beta_{21}), & \ldots & R_2(\alpha_{p-1}, \beta_{p-1\,1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{p-1}(\alpha_1, \beta_{11}), & R_{p-1}(\alpha_2, \beta_{21}), & \ldots & R_{p-1}(\alpha_{p-1}, \beta_{p-1,1}) \end{vmatrix} = A_1 \neq o$$

ist. Nach elementaren Determinantensätzen müssen dann die Gleichungen

$$\gamma_1 R_1(\alpha_i, \beta_i) + \gamma_2 R_2(\alpha_i, \beta_i) + \ldots + \gamma_p R_p(\alpha_i, \beta_i) = o \,(i = 1, 2, \ldots p-1)$$

bestehen und es besitzt somit die Function

$$(\varphi(x, y))_{C_1=\gamma_1, C_2=\gamma_2, \ldots C_p=\gamma_p} = \gamma_1 R_1(x, y) + \gamma_2 R_2(x, y) + \ldots + \gamma_p R_p(x, y)$$

sicher die Nullstellen $(x, y) = (\alpha_i, \beta_i)\,(i = 1, 2, \ldots p-1)$; da nun

$$(\varphi(x, y))_{C_1=\gamma_1, C_2=\gamma_2, \ldots C_p=\gamma_p} = \frac{(\Phi(x, y))_{C_1=\gamma_1, C_2=\gamma_2, \ldots C_p=\gamma_p}}{g(x)}$$

und $g(\alpha_i) \neq o\ (i = 1, 2, \ldots p-1)$ ist, so folgt, dass auch $(\Phi(x, y))_{C_1=\gamma_1, C_2=\gamma_2, \ldots C_p=\gamma_p}$ an diesen Stellen verschwinden muss; d. h. für jeden endlichen Werth $x = \alpha_i\,(i = 1, 2, \ldots p-1)$ existiert ein endliches $y = \beta_i$, welches die Gleichungen $\begin{cases} F(\alpha_i, y) = o \\ (\Phi(\alpha_i, y))_{C_1=\gamma_1, C_2=\gamma_2, \ldots C_p=\gamma_p} = o \end{cases}$ simultan befriedigt, folglich muss nach unserem über die Resultante $S(x; C_1, C_2, \ldots C_p)$ hergeleiteten Satze nothwendig

$$S(\alpha_i; \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p) = o\,(i = 1, 2, \ldots p-1)$$

sein d. h. die Resultante $S(x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p)$ die, wie wir gesehen haben, wegen $\gamma_p \neq o$ nicht identisch verschwindet, besitzt die $p-1$ von einander verschiedene Nullstellen $x = \alpha_i\,(i = 1, 2, \ldots p-1)$.

Wegen $S(x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p)$ ist daher auch *a fortiori* $S(x; C_1, C_2, \ldots C_p)$ in Bezug auf x von mindestens $(p-1)$ten Grade.

Nunmehr denken wir uns um die Stellen $x=\alpha_i (i=1,2,...p-1)$ in der complexen Ebene resp. die Kreise $O_i (i=1,2,...p-1)$ von endlicher Ausdehnung beschrieben, deren Radien $r_i (i=1,2,...p-1)$, wir, was wegen der Wahl der Stellen $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_{p-1}$ sicher möglich ist, so klein annehmen, dass diese Kreise sich vollständig ausschliessen und dass in ihrem Innern kein Werth von x existirt, für den sich Unendlichkeitsstellen der Functionen $R_\lambda (x,y) (\lambda=1,2,...p)$ oder Verzweigungsstellen ergeben, oder für welchen $g(x)$ oder $f_m(x)$ verschwindet. Die Stetigkeit der Potenzreihen (12), welche an der Stelle $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2, ... x_{p-1}=\alpha_{p-1}$ die von Null verschiedenen Werthe $A_\sigma (\sigma=1,2,...m(p-1))$ annehmen, lässt es ausserdem zu, die r_i so klein zu wählen; dass diese Potenzreihen für alle Werthesysteme $x_1, x_2, ... x_{p-1}$, in denen x_i innerhalb $O_i (i=1,2,...p-1)$ angenommen ist, durchweg von Null verschiedene und natürlich auch endliche Werthe besitzen.

Eine weitere Verkleinerung der r_i behalten wir uns noch vor.

Wir denken uns jetzt die Resultante

$S=S(x; C_1, C_2, ... C_p)=\varphi_0+\varphi_1 x+\varphi_2 x^2+...+\varphi_s x^s$,

für deren Grad s, wie wir sahen, die Beziehung $s \geqq p-1$ besteht und deren Coefficienten $\varphi_k=\varphi_k(C_1, C_2, ... C_p) (k=0,1,...s)$ ganze rationale Funktionen von $C_1, C_2, ... C_p$ sind, von denen φ_s nicht identisch verschwindet, nach Potenzen von $x-\alpha_i$, wo i eine der Zahlen 1, 2, ... $p-1$ sein möge, dem Taylor'schen Satze gemäss geordnet, so dass sich

(13) $S=\psi_0+\psi_1 . (x-\alpha_i)+...+\psi_s . (x-\alpha_i)^s$

ergiebt. Hierin sind die Coefficienten

$$\psi_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k S}{\partial x^k}\right)_{x=\alpha_i} (k=0,1,...s)$$

offenbar wiederum ganze rationale Funktionen von $C_1, C_2, ... C_p$, die wir, indem wir sie nach Potenzen von $C_1-\gamma_1, C_2-\gamma_2, ... C_p-\gamma_p$ ordnen, als ganze rationale Funktionen dieser letzteren Grössen auffassen. Da

$S(x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p)$, wie wir sahen, für $x = \alpha_i$ mit irgend einer Ordnungszahl μ, für welche $s \geqq \mu \geqq 1$ gilt, verschwindet, so folgt aus (13), dass, wenn wir mit $\psi_k^{(0)}$ $(k = 0, 1, \ldots s)$ die Werthe bezeichnen, die die ψ_k für $C_1 - \gamma_1 = C_2 - \gamma_2, \ldots = C_p - \gamma_p = o$ annehmen, die Gleichungen

$$(14) \quad \psi_\lambda^{(0)} = o \; (\lambda = 1, 2, \ldots \mu - 1)$$

bestehen müssen, während $\psi_\mu^{(0)}$ eine von Null verschiedene Grösse ist, deren absoluten Betrag wir 2 B nennen.

Jetzt definiren wir

$$(15) \begin{cases} P = \dfrac{\psi_{\mu+1}}{\psi_\mu}(x-\alpha_i) + \dfrac{\psi_{\mu+2}}{\psi_\mu}(x-\alpha_i)^2 + \ldots + \dfrac{\psi_s}{\psi_\mu}(x-\alpha_i)^{s-\mu} \\ Q = \dfrac{\psi_{\mu-1}}{\psi_\mu}\left(\dfrac{1}{x-\alpha_i}\right) + \dfrac{\psi_{\mu-2}}{\psi_\mu}\left(\dfrac{1}{x-\alpha_i}\right)^2 + \ldots + \dfrac{\psi_0}{\psi_\mu}\left(\dfrac{1}{x-\alpha_i}\right)^\mu \end{cases}$$

woraus sich wegen (13) die Gleichung

$$(16) \quad S = \psi_\mu . (x - \alpha_i)^\mu (1 + P + Q)$$

ergiebt. Wir beschreiben nun in der complexen Ebene weitere p Kreise $K_1, K_2, \ldots K_p$ resp. um die Punkte $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$ mit einem gemeinsamen Radius ϱ von endlicher Ausdehnung, über dessen Kleinheit wir noch verfügen wollen. Nun ist $\psi_\mu = \psi_\mu^{(0)} + \chi_\mu$, wenn wir unter χ_μ den entsprechenden für $C_1 - \gamma_1 = C_2 - \gamma_2 = \ldots = C_p - \gamma_p = o$ verschwindenden Bestandtheil von ψ_μ verstehen. Wegen Stetigkeit des letzteren können wir daher ϱ sicher so klein wählen, dass für alle resp. in $K_1, K_2, \ldots K_p$ liegenden Werthe $C_1, C_2, \ldots C_p$: $| \chi_\mu | < B$ ist, da wegen $| \psi_\mu^{(0)} | = 2B$ nothwendig $B > o$ sein muss; es folgt dann sofort $| \psi_\mu | \geqq | \psi_\mu^{(0)} | - | \chi_\mu | > 2B - B$ d. h. es muss in den betrachteten Bereichen durchweg die Ungleichung

$$(17) \quad | \psi_\mu | > B$$

bestehen, während andererseits selbstverständlich auch eine endliche Zahl $A > o$ angebbar ist, derart, dass für dieselben Bereiche überall

$$(18) \quad |\psi_{\mu+\lambda}| < A \; (\lambda = 1, 2, \ldots s-\mu)$$

gilt; offenbar brauchen wir nämlich für A nur eine Zahl zu wählen, die grösser ist, als die dem Werthe nach grösste der Reihen der absoluten Beträge in $\psi_{\mu+1}$, $\psi_{\mu+2}$, $\ldots$ ψ_s für $C_\lambda - \gamma_\lambda = \vartheta \; (\lambda = 1, 2, \ldots p)$, nachdem wir $\vartheta > \varrho$ beliebig angenommen haben.

Ebenso wie wir $C_1, C_2, \ldots C_p$ bezüglich auf das Innere der Kreise $K_1, K_2, \ldots K_p$ beschränken, reduciren wir die Variabilität von x auf das Innere des um α_i geschlagenen Kreises O_i, dessen Radius r_i wir ausser den schon genannten Bedingungen jetzt noch der Ungleichung $r_i < \frac{B}{2A+B}$ unterwerfen, womit a fortiori auch die Ungleichung $r_i < 1$ erfüllt ist. Es folgt dann aus (15), (17) und (18), dass

$$|P| < \frac{A}{B}(r_i + r_i^2 + \ldots + r_i^{s-\mu}) < \frac{A}{B}\sum_{\nu=1}^{\infty} r_i^\nu = \frac{A}{B}\frac{r_i}{1-r_i},$$

also

$$(19) \quad |P| < \frac{1}{2}$$

ist. Nachdem $r_i > o$ nunmehr allen seinen Kleinheitsbedingungen gemäss festgelegt ist, wählen wir irgend eine Zahl $r_i^{(1)}$ derart, dass $o < r_i^{(1)} < r_i$ ist und hierauf eine weitere Zahl C, für welche die Ungleichungen

$$(20) \quad o < C < \frac{B}{2}\frac{r_i^{(1)\mu}(1-r_i^{(1)})}{1-r_i^{(1)\mu}}$$

bestehen und legen nunmehr endlich auch $\varrho > o$ derart fest, dass noch für alle resp. in $K_1, K_2, \ldots K_p$ liegenden Werthe $C_1, C_2, \ldots C_p$ die Relationen

$$(21) \quad |\psi_\lambda| < C \; (\lambda = 0, 1, \ldots \mu - 1)$$

erfüllt sind, was wegen Stetigkeit der für

$$C_1 - \gamma_1 = C_2 - \gamma_2 = \ldots = C_p - \gamma_p = o$$

verschwindenden Functionen $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{\mu-1}$ sicher möglich ist. Jetzt denken wir uns ein ganz beliebiges Werthe-

system $C_1, C_2, \ldots C_p$ resp. innerhalb $K_1, K_2, \ldots K_p$ gewählt, sodass P, Q, S nun Functionen von x allein sind; es wird dann für alle x, welche in der Fläche des Kreisringes liegen, der von O_i und dem ebenfalls um α_i mit dem Radius $r_i^{(1)}$ geschlagenen Kreise $O_i^{(1)}$ begrenzt wird, und für die somit die Beziehung $r_i > |x - \alpha_i| > r_i^{(1)}$ gilt, wegen (15), (17) und (21) die Relation

$$|Q| < \frac{C}{B}\left(\frac{1}{r_i^{(1)}} + \frac{1}{r_i^{(1)2}} + \ldots + \frac{1}{r_i^{(1)\mu}}\right) = \frac{C}{B}\left(\frac{1 - r_i^{(1)\mu}}{1 - r_i^{(1)}} \cdot \frac{1}{r_i^{(1)\mu}}\right)$$

bestehen, die wegen (20) übergeht in

$$(22) \quad |Q| < \frac{1}{2}$$

woraus sich mit Hinzunahme von (19) wegen $|P+Q| \leqq |P| + |Q|$ das Resultat

$$(23) \quad |P + Q| < 1$$

ergiebt. Lassen wir daher x innerhalb des genannten Kreisringes einen kreisförmigen Umlauf um α_i vollziehen, so beschreibt die Function $1 + P + Q$ zufolge ihrer Eindeutigkeit ebenfalls eine geschlossene Curve, ohne den Nullpunkt zu umlaufen; denn wegen (23) muss sie dabei stets innerhalb eines, mit dem Radius 1 um den Punkt 1 geschlagenen Kreises liegen; folglich kehrt das Argument der complexen Zahl $1 + P + Q$ zu seinem alten Werth zurück, während das Argument der complexen Zahl $(x - \alpha_i)^\mu$, die bei den genannten Umlauf eine μ fache Umkreisung des Nullpunktes bewerkstelligt, offenbar um $\mu \cdot 2\pi i$ vermehrt wird, so dass die Gesammtvermehrung des Arguments von $S = \psi_\mu \cdot (x - \alpha_i)^\mu (1 + P + Q)$ bei diesem Umlauf genau $2\mu\pi i$ beträgt, also wegen $\mu \geqq 1$ von Null verschieden ist.

Lägen nun sämmtliche Nullstellen a_λ $(\lambda = 1, 2 \ldots)$ dieser Function $S = \psi_0 + \psi_1 \cdot (x - \alpha_i) + \ldots + \psi_s \cdot (x - \alpha_i)^s$ für das gewählte Werthesystem $C_1, C_2, \ldots C_p$ ausserhalb O_i, so würde bei dem genannten Umlauf die complexe Zahl

$x - a_\lambda = (a_i - a_\lambda) + (x - a_i)$ einen Kreis um den Punkt $a_i - a_\lambda$ mit dem Radius $| x - a_i | < r_i$ beschreiben, ohne dabei wegen $| a_i - a_\lambda | \geqq r_i$ den Nullpunkt zu umlaufen; der Argumentzuwachs von $x - a_\lambda$ und folglich auch von $S = \text{Const.} \prod_\lambda (x - a_\lambda)$ würde daher Null betragen. Dieser Widerspruch zeigt also, dass $S = S(x; C_1, C_2, \ldots C_p)$ für das willkürlich innerhalb $K_1, K_2, \ldots K_p$ gewählte Werthesystem $C_1, C_2, \ldots C_p$ mindestens eine innerhalb des Kreises O_i gelegene Nullstelle $x = a_i$ besitzen muss.

Folglich ergiebt sich nach unserem Resultantensatz, da wir es so eingerichtet haben, dass $f_m(a_i) \neq 0$ sein muss, dass ein endliches $y = b_i$ existiert, das die Gleichungen $\begin{cases} F(a_i, y) = 0 \\ \Phi(a_i, y) = 0 \end{cases}$ befriedigt; da nun überdies auch $g(a_i) \neq 0$ ist, so folgt, dass $\varphi(x, y) = \dfrac{\Phi(x, y)}{g(x)}$ nothwendig die Nullstelle $(x, y) = (a_i, b_i)$ besitzen muss. Dasselbe gilt natürlich für alle Kreise $O_i (i = 1, 2, \ldots p - 1)$, wenn wir auch für die übrigen die analogen Kleinheitsbedingungen für ihre Radien r_i und für den gemeinsamen Radius ϱ der Kreise $K_1, K_2, \ldots K_p$ aufstellen und diese Grössen sämmtlichen Bedingungen unterworfen, was offenbar stets möglich, ohne dass eine dieser Grössen verschwinden müsste.

Nachdem dies geschehen, ergiebt sich also, dass die Function $\varphi(x, y) = C_1 R_1(x, y) + C_2 R_2(x, y) + \ldots + C_p R_p(x, y)$ für jedes beliebige System von Werthen $C_1, C_2, \ldots C_p$, die resp. den von uns construirten Kreisen $K_1, K_2, \ldots K_p$ angehören unter ihren im Endlichen gelegenen Nullstellen sicher $p - 1$ verschiedene Nullstellen $(x, y) = (a_i, b_i) (i = 1, 2, \ldots p - 1)$ besitzen muss von der Art, dass a_i innerhalb $O_i (i = 1, 2, \ldots p - 1)$ liegt. Da nun diese Kreise entsprechend klein gewählt sind, so liegt (a_i, b_i) nothwendig in der Umgebung einer der Stellen (α_i, β_{ik}) $(k = 1, 2, \ldots m)$, auf deren Bereiche sich die Entwickelungen (12) bezogen. Es kann daher der Werth der Determinante

$$\begin{vmatrix} R_1(a_1, b_1), & R_1(a_2, b_2), & \ldots & R_1(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ R_2(a_1, b_1), & R_2(a_2, b_2), & \ldots & R_2(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{p-1}(a_1, b_1), & R_{p-1}(a_2, b_2), & \ldots & R_{p-1}(a_{p-1}, b_{p-1}) \end{vmatrix}$$

sicher aus einer der Potenzreihen (12) für $x_i = a_i (i = 1, 2, \ldots p-1)$ bestimmt werden und ist folglich endlich und von Null verschieden, wie sich aus der Kleinheit der Kreise O_i ergab. Die von uns gebildeten endlichen Gebiete $K_1, K_2, \ldots K_p$ erfüllen also in der That die an sie im Satze II gestellten Anforderungen, womit die Richtigkeit des letzteren vollständig bewiesen ist.

Nachdem die Richtigkeit der Sätze I und II nunmehr feststeht, denken wir uns zunächst die in I genannten ganzen rationalen Functionen g_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n_1)$ der Variablen

$$\begin{cases} C_{12}, & C_{13}, & \ldots & C_{1p} \\ C_{22}, & C_{23}, & \ldots & C_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p2}, & C_{p3}, & \ldots & C_{pp} \end{cases}$$

sowie die in II. bezeichneten Gebiete $K_1, K_2, \ldots K_p$ wirklich gebildet und wählen, was nach dem am Anfang dieses Paragraphen bewiesenen Hülfssatz stets möglich ist, für $C_{\lambda 2}$ innerhalb K_2, für $C_{\lambda 3}$ innerhalb K_3 etc. für $C_{\lambda p}$ innerhalb K_p $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ solche Werthe, dass die Functionen $g_1, g_2, \ldots g_{n_1}$ sämmtlich von Null verschieden und natürlich endlich sind. Auf Grund der gewählten Werthe stellen wir dann nach Satz I die dort ebenfalls angeführten ganzen rationalen Functionen $G_i(C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}) (i = 1, 2, \ldots n_2)$ auf und bestimmen endlich für $C_{11}, C_{21}, \ldots C_{p1}$ wiederum nach dem Hülfssatz Werthe, die sämmtlich in K_1 liegen und für welche die letztgenannten Functionen alle von Null verschieden und endlich sind. Die durch

$$\varphi_\lambda(x, y) = C_{\lambda 1} R_1(x, y) + C_{\lambda 2} R_2(x, y) + \ldots + C_{\lambda p} R_p(x, y)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

definierten Functionen besitzen dann nicht allein nach Satz I die ersten 5 der im vorigen Paragraphen aufgestellten

6 typischen Eigenschaften, sondern, weil überdies $C_{\lambda 1}$ in K_1, $C_{\lambda 2}$ in K_2, etc. $C_{\lambda p}$ in K_p liegt, nach Satz II auch noch die 6te dieser Eigenschaften. Das System der so gebildeten Functionen

$$\varphi_1(x, y),\ \varphi_2(x, y),\ \ldots\ \varphi_p(x, y)$$

ist also nach § 5 in der That ein typisches; und die Existenz typischer Systeme ist hiermit vollständig bewiesen.

§ 7.

Es sei

$$(1)\quad \varphi_\lambda(x, y) = C_{\lambda 1} R_1(x, y) + C_{\lambda 2} R_2(x, y) + \ldots + C_{\lambda p} R_p(x, y)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

irgend eines der soeben als existierend nachgewiesenen typischen Systeme, so bleibt uns nach den Erörterungen am Ende des § 5 nur noch übrig zu zeigen, dass, wenn λ irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots p$ ist, und wenn $(x, y) = (a_i^{(\lambda)}, b_i^{(\lambda)})$ $(i = 1, 2, \ldots \tau_\lambda)$ die sämmtlichen von einander verschiedenen im Endlichen gelegenen Nullstellen von $\varphi_\lambda(x, y)$ sind, wegen der geforderten eindeutigen Umkehrbarkeit des Gleichungssystems (I) nothwendig $\tau_\lambda = 2(p-1)$ sein muss.

Hierzu denken wir uns aus den genannten τ_λ Nullstellen irgend $p-1$ solche herausgegriffen, die durch die letzte der im § 5 aufgestellten 6 typischen Eigenschaften ausgezeichnet sind, für die also, wenn wir sie in irgend einer Reihenfolge mit (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$ (a_{p-1}, b_{p-1}) bezeichnen, die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1(a_1, b_1), & R_1(a_2, b_2), & \ldots & R_1(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ R_2(a_1, b_1), & R_2(a_2, b_2), & \ldots & R_2(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{p-1}(a_1, b_1), & R_{p-1}(a_2, b_2), & \ldots & R_{p-1}(a_{p-1}, b_{p-1}), \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen endlichen Werth besitzt. Eben wegen der genannten Eigenschaften müssen stets $p-1$ derartige Nullstellen vorhanden sein. Die Anzahl

der übrig gebliebenen Nullstellen beträgt dann $\tau_\lambda - (p-1)$ und ist sicher nicht kleiner als $p-1$, da, wie im § 5 bereits bewiesen war, gemäss den dortigen Gleichungen (7) die Relation $\tau_\lambda \geqq 2(p-1)$ bestehen muss. Demgemäss entnehmen wir dem übrig gebliebenen Rest, was hiernach sicher möglich sein muss, irgend weitere $p-1$ von einander verschiedene Nullstellen, die wir der Reihe nach mit $(a_p, b_p), (a_{p+1}, b_{p+1}), \ldots (a_{2(p-1)}, b_{2(p-1)})$ bezeichnen. Ist nun (a_ν, b_ν) eine beliebige der letzteren, also ν eine der Zahlen $p, p+1, \ldots 2(p-1)$, so werden wir nach Analogie des im § 4 eingeschlagenen Verfahrens die in der Einleitung aufgestellten Gleichungen (I) zur Ermittelung weiterer nothwendiger Bedingungen für die geforderte eindeutige Umkehrbarkeit derselben nunmehr speciell auf ihr Verhalten in den Bereichen der p Stellen $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_{p-1}, b_{p-1}), (a_\nu, b_\nu)$ hin prüfen und demgemäss die variablen Stellen (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots (x_{p-1}, y_{p-1}), (x_p, y_p)$ bezüglich auf die Umgebung von

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_{p-1}, b_{p-1}), (a_\nu, b_\nu)$$

beschränken. Wegen der so oft erwähnten typischen Eigenschaften gelten nun, wie leicht ersichtlich, Entwickelungen von folgender Form:

$$(2)\quad \begin{cases} y_1 = b_1 + \alpha_1 (x_1 - a_1) + \ldots \\ y_2 = b_2 + \alpha_2 (x_2 - a_2) + \ldots \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ y_{p-1} = b_{p-1} + \alpha_{p-1}(x_{p-1} - a_{p-1} + \ldots \\ y_p = b_\nu + \alpha_\nu (x_p - a_\nu) + \ldots \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} R_k (x_1, y_1) = R_k (a_1, b_1) + \beta_{k1} (x_1 - a_1) + \ldots \\ R_k (x_2, y_2) = R_k (a_2, b_2) + \beta_{k2} (x_2 - a_2) + \ldots \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ R_k(x_{p-1}, y_{p-1}) = R_k(a_{p-1}, b_{p-1}) + \beta_{k,p-1}(x_{p-1} - a_{p-1}) + \ldots \\ R_k (x_p, y_p) = R_k (a_\nu, b_\nu) + \beta_{k\nu} (x_p - a_\nu) + \ldots \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots p) \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi_\lambda(x_1, y_1) = \gamma_1 (x_1 - a_1) + \dots \\ \varphi_\lambda(x_2, y_2) = \gamma_2 (x_2 - a_2) + \dots \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \varphi_\lambda(x_{p-1}, y_{p-1}) = \gamma_{p-1}(x_{p-1} - a_{p-1}) + \dots \\ \varphi_\lambda(x_p, y_p) = \gamma_\nu (x_p - a_\nu) + \dots \end{cases}$$

worin $b_1, b_2, \dots b_{p-1}, b_\nu, R_k(a_1, b_1), R_k(a_2, b_2), \dots R_k(a_{p-1}, b_{p-1}), R_k(a_\nu, b_\nu), \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{p-1}, \gamma_\nu$ lauter von Null verschiedene endliche Constante sind. Insbesondere folgt aus (1), (3) und (4), dass

$$(5)\quad \begin{cases} \gamma_1 = \left(\frac{d\varphi_\lambda(x,y)}{dx}\right)_{(x,y)=(a_1,b_1)} = \sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k}\left(\frac{dR_k(x,y)}{dx}\right)_{(x,y)=(a_1,b_1)} = \sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k}\beta_{k1} \\ \gamma_2 = \left(\frac{d\varphi_\lambda(x,x)}{dx}\right)_{(x,y)=(a_2,b_2)} = \sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k}\left(\frac{dR_k(x,y)}{dx}\right)_{(x,y)=(a_2,b_2)} = \sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k}\beta_{k1} \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \gamma_{p-1} = \left(\frac{d\varphi_k(x,y)}{dx}\right)_{(x,y)=(a_{p-1},b_{p-1})} = \sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k}\left(\frac{dR_k(x,y)}{dx}\right)_{(x,y)=(a_{p-1},b_{p-1})} = \sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k}\beta_{k,p-1} \\ \gamma_\nu = \left(\frac{d\varphi_k(x,y)}{dx}\right)_{(x,y)=(a_\nu,b_\nu)} = \sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k}\left(\frac{dR_k(x,y)}{dx}\right)_{(x,y)=(a_\nu,b_\nu)} = \sum_{k-1}^{p} C_{\lambda k}\beta_{k\nu} \end{cases}$$

ist. Andererseits folgen aus (3) nach der Theorie der Abelschen Integrale durch Integration die weiteren Entwickelungen:

$$\begin{cases} \int_{(c_1, d_1)}^{(x_1, y_1)} R_k(x, y)\, dx = A_{k1} + R_k(a_1, b_1)(x_1 - a_1) + \frac{1}{2}\beta_{k1}(x_1 - a_1)^2 + \dots \\ \int_{(c_2, d_2)}^{(x_2, y_2)} R_k(x, y)\, dx = A_{k2} + R_k(a_2, b_2)(x_2 - a_2) + \frac{1}{2}\beta_{k2}(x_2 - a_2)^2 + \dots \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \int_{(c_{p-1}, d_{p-1})}^{(x_{p-1}, y_{p-1})} R_k(x,y)dx = A_{k,p-1} + R_k(a_{p-1}, b_{p-1})(x_{p-1} - a_{p-1}) + \frac{1}{2}\beta_{k,p-1}(x_{p-1} - a_{p-1})^2 + \dots \\ \int_{(c_p, d_p)}^{(x_p, y_p)} R_k(x, y)\, dx = A_{k\nu} + R_k(a_\nu, b_\nu)(x_p - a_\nu) + \frac{1}{2}\beta_{k\nu}(x_p - a_\nu)^2 + \dots \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \dots p)$$

worin die Integrationsconstanten

$$A_{k1},\ A_{k2},\ \ldots\ A_{k,p-1},\ A_{k\nu}$$

nach den Erörterungen des § 1 sicher endliche Grössen sind.

Für die betrachteten Bereiche geht daher das Gleichungssystem (I) über in das System

$$(V)\left\{\begin{aligned}
v_1-e_1 &= R_1(a_1,b_1)(x_1-a+_1)\ldots+R_1(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+R_1(a_\nu,b_\nu)(x_p-a_\nu)+\\
&\quad \frac{1}{2}\left\{\beta_{11}(x_1-a_1)^2+\ldots+\beta_{1,p-1}(x_{p-1}-a_{p-1})^2+\beta_{1\nu}(x_p-a_\nu)^2\right\}+\ldots\\
v_2-e_2 &= R_2(a_1,b_1)(x_1-a_1)+\ldots+R_2(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+R_2(a_\nu,b_\nu)(x_p-a_\nu)+\\
&\quad \frac{1}{2}\left\{\beta_{21}(x_1-a_1)^2+\ldots+\beta_{2,p-1}(x_{p-1}-a_{p-1})^2+\beta_{2\nu}(x_p-a_\nu)^2\right\}+\ldots\\
&\text{— — — — — — — — — — — — — — — — — —}\\
v_p-e_p &= R_p(a_1,b_1)(x_1-a_1)+\ldots+R_p(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+R_p(a_\nu,b_\nu)(x_p-a_\nu)+\\
&\quad \frac{1}{2}\left\{\beta_{p1}(x_1-a_1)^2+\ldots+\beta_{p,p-1}(x_{p-1}-a_{p-1})^2+\beta_{p\nu}(x_p-a_\nu)^2\right\}+\ldots
\end{aligned}\right.$$

Hierin sind die folgenden Glieder sämmtlich homogene lineare Funktionen von $(x_1-a_1)^\varrho, \ldots (x_{p-1}-a_{p-1})^\varrho, (x_p-a_\nu)^\varrho$ für alle Werthe $\varrho = 3, 4, \ldots$, während $e_1, e_2, \ldots e_p$, nachdem über die Integrationscurven bis in die betrachteten Bereiche in irgend einer Weise verfügt ist, wohlbestimmte endliche Grössen bedeuten, die sich durch Zusammenfassung der Integrationsconstanten ergeben.

Ist dann nach beliebiger Wahl der Grössen v

$$x_i = \xi_i \ (i = 1, 2, \ldots p)$$

irgend ein Werthsystem, welches die Gleichungen (V) erfüllt, so bilden, wenn man die zugehörigen Werthe $y_i = \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ aus (2) errechnet,

$$(x, y) = (\xi_i, \eta_i) \ (i = 1, 2, \ldots p)$$

offenbar ein System von Stellen der Riemann'schen Fläche von der Art, dass das Ausgangssystem (I) durch

$$(x_i, y_i) = (\xi_i, \eta_i) \ (i = 1, 2, \ldots p)$$

nach entsprechender Verfügung über die Integrationswege für dieselben Werthe der v befriedigt wird.

Wir machen nun in (V) die Substitution

$$(6)\quad \begin{cases} t_1 = R_1(a_1,b_1)(x_1-a_1)+\ldots+R_1(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+R_1(a_\nu,b_\nu)(x_p \\ t_2 = R_2(a_1,b_1)(x_1-a_1)+\ldots+R_2(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+R_2(a_\nu,b_\nu)(x_p \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ t_{p-1} = R_{p-1}(a_1,b_1)(x_1-a_1)+\ldots+R_{p-1}(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})+R_{p-1}(a_\nu,b_\nu)(x_p \\ t_p = \quad 0\,.\,(x_1-a_1)+\ldots+\quad 0\,.\,(x_{p-1}-a_{p-1})+\quad 1\,.\,(x_p \end{cases}$$

welche, da hier die Substitutionsdeterminante offenbar den Werth $\Delta \neq 0$ besitzt, zu der eindeutigen Umkehrung führt:

$$(7)\quad \begin{cases} x_1 - a_1 = c_{11}^{(\nu)}\ t_1 + \ldots + c_{1,p-1}^{(\nu)}\ t_{p-1} + c_{1p}^{(\nu)}\ t_p \\ x_2 - a_2 = c_{21}^{(\nu)}\ t_1 + \ldots + c_{2,p-1}^{(\nu)}\ t_{p-1} + c_{2p}^{(\nu)}\ t_p \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ x_{p-1} - a_{p-1} = c_{p-1,1}^{(\nu)}\ t_1 + \ldots + c_{p-1\,p-1}^{(\nu)}\ t_{p-1} + c_{p-1,p}^{(\nu)}\ t_p \\ x_p - a_\nu = \quad 0\,.\,t_1 + \ldots + \quad 0\,.\,t_{p-1} + \quad 1\,.\,t_p \end{cases}$$

deren Coefficienten c wohlbestimmte endliche Grössen sind.

Die Unabhängigkeit der neu eingeführten Variablen $t_1, t_2, \ldots t_p$ ist hierdurch offenbar gesichert; denn vermöge (6) und (7) ist zu willkürlichen Werthen der x stets ein Werthesystem $t_1, t_2, \ldots t_p$ und umgekehrt: zu willkürlichen Werthen der t stets ein Werthesystem $x_1, x_2, \ldots x_p$ bestimmbar; und zwar wird letzteres, wie aus (7) hervorgeht, stets in den betrachteten Bereichen liegen, wenn man die Werthe der t auf das Innere eines genügend kleinen, um den Nullpunkt geschlagenen Kreises beschränkt.

Als Nullstellen der Function $\varphi_\lambda(x,y) = \sum_{k=1}^{p} C_{\lambda k}\, R_k\,(x,\ y)$ erfüllen $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$, $\ldots$ $(a_{p-1},\ b_{p-1})$, $(a_\nu,\ b_\nu)$ die Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} C_{\lambda 1}\,R_1\,(a_1,\ b_1) \quad + \ldots + \quad C_{\lambda p}\,R_p\,(a_1,\ b_1) \ = \ 0 \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ C_{\lambda 1}\,R_1\,(a_{p-1},b_{p-1}) + \ldots + \quad C_{\lambda p}\,R_p\,(a_{p-1},b_{p-1}) \ = \ 0 \\ C_{\lambda 1}\,R_1\,(a_\nu,\ b_\nu) \quad + \ldots + \quad C_{\lambda p}\,R_p\,(a_\nu,\ b_\nu) \ = \ 0 \end{cases}$$

woraus sofort hervorgeht, dass $C_{\lambda p} \neq 0$ sein muss; denn sonst müsste einerseits wegen der ersten typischen Eigenschaft eine der Zahlen $C_{\lambda 1}, C_{\lambda 2}, \ldots C_{\lambda,p-1}$ nothwendig von Null verschieden sein, während andererseits, hiermit im Widerspruch die dann bestehenden Gleichungen

$$\begin{cases} C_{\lambda 1} R_1 (a_1, b_1) + \ldots + C_{\lambda,p-1} R_{p-1} (a_1, b_1) = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ C_{\lambda 1} R_1 (a_{p-1}, b_{p-1}) + \ldots + C_{\lambda,p-1} R_{p-1} (a_{p-1}, b_{p-1}) = 0 \end{cases}$$

wegen $\Delta \neq 0$ die Relationen $C_{\lambda 1} = \ldots = C_{\lambda,p-1} = 0$ nach sich ziehen würden.

Addiert man nun die Gleichungen (8) nachdem man sie resp. mit $(x_1 - a_1), \ldots (x_{p-1} - a_{p-1}), (x_p - a_\nu)$ multipliciert hat, so folgt:

$$C_{\lambda k} [R_k(a_1,b_1)(x_1 - a_1) + \ldots + R_k(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1} - a_{p-1}) + R_k(a_\nu,b_\nu)(x_p - a_\nu)] = 0.$$

Die wegen $C_{\lambda p} \neq 0$ zulässige Division durch $C_{\lambda p}$ ergiebt hieraus unter Berücksichtigung von (6)

$$R_p(a_1,b_1)(x_1 - a_1) + \ldots + R_p(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1} - a_{p-1}) + R_p(a_\nu,b_\nu)(x_p - a_\nu) = -\frac{C_{\lambda 1}}{C_{\lambda p}} t_1 - \ldots - \frac{C_{\lambda,p-1}}{C_{\lambda p}} t_{p-1}.$$

Demgemäss geht das System (V) durch die gemachte Substitution (6) und (7) bei Entwickelung nach dem Taylor'schen Satze, wie leicht ersichtlich, über in

$$\begin{aligned}
x_1 - c_1 &= 1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + \ldots + 0 \cdot t_{p-1} + t_p^2 \frac{1}{2} [\beta_{11} (c_{1p}^{(\nu)})^2 + \ldots + \beta_{1,p-1} (c_{p-1,p}^{(\nu)})^2 + \beta_{1\nu}] + G_1 \\
x_2 - e_2 &= 0 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 + \ldots + 0 \cdot t_{p-1} + t_p^2 \frac{1}{2} [\beta_{21} (c_{1p}^{(\nu)})^2 + \ldots + \beta_{2,p-1} (c_{p-1,p}^{(\nu)})^2 + \beta_{2\nu}] + G_2 \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
x_{p-1} - e_{p-1} &= 0 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + \ldots + 1 \cdot t_{p-1} + t_p^2 \frac{1}{2} [\beta_{p-1,1} (c_{1p}^{(\nu)})^2 + \ldots + \beta_{p-1,p-1} (c_{p-1,p}^{(\nu)})^2 + \beta_{p-1,\nu}] + G_{p-1} \\
x_p - e_p &= \left(-\frac{C_{\lambda 1}}{C_{\lambda p}}\right) t_1 + \left(-\frac{C_{\lambda 2}}{C_{\lambda p}}\right) t_2 + \ldots + \left(-\frac{C_{\lambda,p-1}}{C_{\lambda p}}\right) t_{p-1} + t_p^2 \frac{1}{2} [\beta_{p1} (c_{1p}^{(\nu)})^2 + \ldots + \beta_{p,p-1} (c_{p-1,p}^{(\nu)})^2 + \beta_{p\nu}] + G_p
\end{aligned}$$

wenn man $t_1, t_2, \ldots t_p$ auf ein genügend kleines, um den Nullpunkt abgegrenztes Variabilitätsbereich beschränkt. Hierin sind $G_1, G_2, \ldots G_p$, wie aus der gegebenen Struktur des Systems (V) leicht geschlossen werden kann, nach ganzen positiven Potenzen von $t_1, t_2, \ldots t_p$ fortschreitende Potenzreihen, deren Glieder mindestens von der zweiten Dimension hinsichtlich dieser Grössen sind und t_p, da, wo es isoliert auftritt, nur mit Exponenten enthalten, die grösser als 2 sind.

Wir denken uns jetzt resp. um die Stellen $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}, a_\nu$ in der complexen Ebene p Kreise $O_1, O_2, \ldots O_{p-1}, O_\nu$ von endlicher aber beliebig kleiner Ausdehnung beschrieben, so dass, indem wir die Variabilität von $x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, x_p$ resp. auf das Innere von $O_1, O_2, \ldots O_{p-1}, O_\nu$ beschränken die Convergenzbedingungen von (2) und (V) sicher erfüllt sind; dann lässt sich, wie sofort einleuchtet, stets eine Zahl $\delta > 0$ bestimmen derart, dass für alle Werthe $t_1, t_2, \ldots t_p$, die die Bedingungen

$$| t_i | < \delta \quad (i = 1, 2, \ldots p)$$

erfüllen, sich aus (7) nur solche Werthe $x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, x_p$ ergeben, die resp. in den genannten Kreisen liegen.

Gesetzt nun, es hätte die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots & 0, & \frac{1}{2}[\beta_{11}(c_{1p}^{(\nu)})^2 + \ldots + \beta_{1,p-1}(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2 + \beta_{1\nu}] \\ 0, & 1, & \ldots & 0, & \frac{1}{2}[\beta_{21}(c_{1p}^{(\nu)})^2 + \ldots + \beta_{2,p-1}(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2 + \beta_{2\nu}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots & 1, & \frac{1}{2}[\beta_{p-1,1}(c_{1p}^{(\nu)})^2 + \ldots + \beta_{p-1,p-1}(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2 \mp \beta_{p-1,\nu}] \\ \left(-\frac{C_{\lambda 1}}{C_{\lambda p}}\right), & \left(-\frac{C_{\lambda 2}}{C_{\lambda p}}\right), & \ldots & \left(-\frac{C_{\lambda,p-1}}{C_{\lambda p}}\right), & \frac{1}{2}[\beta_{p1}(c_{1p}^{(\nu)})^2 + \ldots + \beta_{p,p-1}(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2 + \beta_{p\nu}] \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth, so würde sich nach unserem, im § 3 bewiesenen Fundamentaltheorem in Bezug auf das System (VI) folgendes ergeben:

Es lassen sich p Kreise $K_1, K_2, \ldots K_p$ um Punkte, die in beliebiger Nähe von resp. $e_1, e_2, \ldots e_p$ liegen, so beschreiben, dass für willkürliche, unabhängig von einander in diesen Kreisen gewählte Werthe $v_1, v_2, \ldots v_p$ stets Werthesysteme $t_1, t_2, \ldots t_p$ existieren, welche die Gleichungen (VI) befriedigen und die Bedingungen

$$| t_i | < \delta \; (i = 1, 2, \ldots p)$$

erfüllen, und zwar können hierbei für t_p stets zwei von einander und von Null verschiedene Werthe $t_p^{(1)}$ und $t_p^{(2)}$ gewählt werden.

Sind nun $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots t_{p-1}^{(1)}$ resp. $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots t_{p-1}^{(2)}$ diejenigen Werthe von $t_1, t_2, \ldots t_{p-1}$, welche $t_p^{(1)}$ resp. $t_p^{(2)}$ zu einem solchen Werthesystem vervollständigen, so erhalten wir dementsprechend aus (7) zwei Werthesysteme

$$x_i = \xi_i^{(1)} \; (i = 1, 2, \ldots p) \text{ und } x_i = \xi_i^{(2)} \; (i = 1, 2, \ldots p),$$

welche für dieselben v die Gleichungen (V) befriedigen, deren rechte Seiten ja mit Hinzunehmen von (7) identisch in die rechten Seiten von (VI) übergehen. Wie wir gesehen haben, liegen dann $\xi_1^{(\varrho)}, \xi_2^{(\varrho)}, \ldots \xi_{p-1}^{(\varrho)}, \xi_p^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, 2)$ resp. im Innern der beliebig klein construierten Kreise $O_1, O_2, \ldots O_{p-1}, O_\nu$ und es sind, da insbesondere

$$\xi_p^{(1)} - a_\nu = t_p^{(1)} \text{ und } \xi_p^{(2)} - a_\nu = t_p^{(2)}$$

ist, die Werthe $\xi_p^{(1)}, \xi_p^{(2)}$ sicher von einander und von a_ν verschieden. Sind dann $y_i = \eta_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ die resp. zu $x_i = \xi_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots p)$, und $y_i = \eta_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ Die resp. zu $x_i = \xi_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ vermöge der Gleichungen (2) gehörigen Werthe von $y_1, y_2, \ldots y_p$, so bilden nach unseren früheren Erörterungen $(\xi_i^{(1)}, \eta_i^{(1)})$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ und $(\xi_i^{(2)}, \eta_i^{(2)})$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ zwei Systeme von Stellen der Riemann'schen Fläche von der Art, dass, wenn das System (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots p)$ mit irgend einem dieser Systeme identificiert wird, das Gleichungssystem (I) für die unabhängig von einander gewählten Werthe $v_1, v_2, \ldots v_p$

befriedigt wird; und dies steht offenbar mit der geforderten eindeutigen Umkehrbarkeit von (I) im Widerspruch, falls sich zeigen lässt, dass die beiden Systeme

$$(\xi_i^{(1)}, \eta_i^{(1)}) \ (i = 1, 2, \ldots p), \ (\xi_i^{(2)}, \eta_i^{(2)}) \ (i = 1, 2, \ldots p)$$

auch abgesehen von der Reihenfolge ihrer Elemente von einander verschieden sind. Hierzu aber genügt es, darzuthun, dass z. B. die Stelle $(\xi_p^{(2)}, \eta_p^{(2)})$ im Systeme $(\xi_i^{(1)}, \eta_i^{(1)})$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ nicht vorkommen kann. Da nun schon $\xi_p^{(2)} \neq \xi_p^{(1)}$ ist, so ist $(\xi_p^{(2)}, \eta_p^{(2)})$ sicher von $(\xi_p^{(1)}, \eta_p^{(1)})$ verschieden; ebenso lässt sich aber bewirken, dass $(\xi_p^{(2)}, \eta_p^{(2)})$ auch mit keiner der Stellen

$$(\xi_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}) \ (i = 1, 2, \ldots p - 1)$$

übereinstimmt; denn sollten, was nicht ausgeschlossen ist, unter den Werthen $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ Grössen a_ν existieren, welche mit a_ν übereinstimmen, so müssen die Stellen (a_i, b_i) und (a_ν, b_ν), da es doch von einander verschiedene Nullstellen von $\varphi_\lambda(x, y)$ sind, in verschiedenen Blättern liegen; mithin muss in diesem Falle, da zufolge der $\underline{\underline{4}}$ten typischen Eigenschaft die Wurzeln y der Gleichung $F(a_\nu, y) = o$ alle von einander verschieden sind, nothwendig $b_\nu \neq b_i$ sein; daher konnte man die um $a_1, a_2 \ldots a_{p-1}, a_\nu$ geschlagene Kreise $O_1, O_2, \ldots O_{p-1}, O_\nu$ wegen Stetigkeit der Potenzreihen (2) sicher auch so klein wählen, dass für alle Werthe $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots x_p = \xi_p$, welche resp. diesen Kreisen angehören, von den zugehörigen, aus (2) zu bestimmenden Grössen $y_1 = \eta_1, y_2 = \eta_2, \ldots y_p = \eta_p$, nothwendig η_p, η_i von einander verschieden sind. Wenn wir also auch zulassen müssen, dass unter $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots \xi_{p-1}^{(1)}$ solche Werthe $\xi_i^{(1)}$ existieren, die mit $\xi_p^{(2)}$ übereinstimmen, so ist dann doch nothwendig $\eta_p^{(2)} \neq \eta_i^{(1)}$, womit die wirkliche Verschiedenheit der Systeme $(\xi_i^{(1)}, \eta_i^{(1)})$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ und $(\xi_i^{(2)}, \eta_i^{(2)})$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ dargethan ist.

Die gemachte Annahme, die Determinante A sei von Null verschieden, ist also mit der geforderten eindeutigen

Umkehrbarkeit von (I) unvereinbar und es muss desshalb $A = 0$, oder, wie sich nach Multiplikation mit 2 ergiebt:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, \ldots & 0, & \beta_{11}(c_{1p}^{(\nu)})^2+\ldots+\beta_{1,p-1}\,(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2+\beta_{1\nu} \\ 0, & 1, \ldots & 0, & \beta_{21}(c_{1p}^{(\nu)})^2+\ldots+\beta_{2,p-1}\,(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2+\beta_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, \ldots & 1, & \beta_{p-1,1}(c_{1p}^{(\nu)})^2+\ldots+\beta_{p-1,p-1}(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2+\beta_{p-1,\nu} \\ -\frac{C_{\lambda 1}}{C_{\lambda p}}, & -\frac{C_{\lambda 2}}{C_{\lambda p}}, \ldots & -\frac{C_{\lambda,p-1}}{C_{\lambda p}}, & \beta_{p1}(c_{p1}^{(\nu)})^2+\ldots+\beta_{p,p-1}\,(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2+\beta_{p\nu} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Wendet man den bekannten Satz, der die gleichzeitige Entwickelung einer Determinante nach den Elementen einer Zeile und einer Colonne lehrt, hier auf die letzte Zeile und letzte Colonne an, so geht diese Gleichung, wie sofort zu sehen über in

$$\beta_{p1}(c_{1p}^{(\nu)})^2+\ldots+\beta_{p,p-1}(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2+\beta_{p\nu}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{C_{\lambda k}}{C_{\lambda p}}\,[\beta_{k1}(c_{1p}^{(\nu)})^2+\ldots+\beta_{k,p-1}(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2+\beta_{k\nu}]=0.$$

Ordnet man diese Gleichung nach Multiplikation mit $C_{\lambda p}$ nach Potenzen von $c_{kp}^{(\nu)}$ $(k = 1, 2, \ldots p-1)$, so folgt:

$$\sum_{k=1}^{p}(C_{\lambda k}\beta_{k\nu})+(c_{1p}^{(\nu)})^2\sum_{k=1}^{p}(C_{\lambda k}\beta_{k1})+\ldots+(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2\sum_{k=1}^{p}(C_{\lambda k}\beta_{k,p-1})=0.$$

Wegen (5) ergiebt sich hieraus endlich

$$-\gamma_\nu = (c_{1p}^{(\nu)})^2\,\gamma_1+\ldots+(c_{p-1,p}^{(\nu)})^2\,\gamma_{p-1}\;(\nu=p,p+1,\ldots 2(p-1))$$

Schreibt man nun zur Bestimmung der Grössen $c_{kp}^{(\nu)}$ $(k = 1, 2, \ldots p-1)$ die Gleichungen (6) in der Form:

$$-R_\mu(a_\nu,b_\nu)t_p=-t_\mu+R_\mu(a_1,b_1)(x_1-a_1)+\ldots+R_\mu(a_{p-1},b_{p-1})(x_{p-1}-a_{p-1})\;(\mu=1,2,\ldots p-1),$$

so folgt wegen (7), dass

$$-R_\mu(a_\nu,b_\nu)t_p=-t_\mu+\sum_{\varrho=1}^{p-1}R_\mu(a_\varrho,b_\varrho)[c_{\varrho 1}^{(\nu)}t_1+\ldots+c_{\varrho,p-1}^{(\nu)}t_{p-1}+c_{\varrho p}^{(\nu)}t_p]$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots p-1)$$

ist. Da nun $t_1, t_2, \ldots t_p$, wie wir sahen, als unabhängige Variable betrachtet werden können, so müssen die entsprechenden Coefficienten rechts und links übereinstimmen, und man erhält durch Vergleich der Coefficienten von t_p die Relationen

$$-R_\mu(a_\nu, b_\nu) = R_\mu(a_1, b_1)\mathfrak{c}_{1p}^{(\nu)} + \ldots + R_\mu(a_{p-1}, b_{p-1})\mathfrak{c}_{p-1,p}^{(\nu)} (\mu = 1, 2, \ldots p-1),$$

wodurch die Grössen $\mathfrak{c}_{1p}^{(\nu)}, \ldots \mathfrak{c}_{p-1,p}^{(\nu)}$ wegen $\Delta \neq 0$ offenbar allein schon eindeutig definiert sind. Wir haben also, wenn man noch zur Beseitigung der dreifachen indices

$$\mathfrak{c}_{\mu p}^{(\nu)} = k_{\nu-p+1,\mu} \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots p-1 \\ \nu = p, p+1, \ldots 2(p-1) \end{pmatrix}$$

setzt, aus der geforderten, eindeutigen Umkehrbarkeit von (I) folgenden Satz erschlossen:

I. Sind $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots (a_{p-1}, b_{p-1})$ irgend $p-1$ der Stellen $(a_i^{(\lambda)}, b_i^{(\lambda)})$ $(i = 1, 2, \ldots \tau_\lambda)$, welche die Bedingung

$$\begin{vmatrix} R_1(a_1, b_1), & R_1(a_2, b_2), & \ldots & R_1(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ R_2(a_1, b_1), & R_2(a_2, b_2), & \ldots & R_2(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ - & - & - & - \\ R_{p-1}(a_1, b_1), & R_{p-1}(a_2, b_2), & \ldots & R_{p-1}(a_{p-1}, b_{p-1}) \end{vmatrix} \neq 0$$

erfüllen, und sind $(a_p, b_p), (a_{p+1}, b_{p+1}), \ldots (a_{2(p-1)}, b_{2(p-1)})$ beliebige andere, von einander verschiedene aus den genannten Stellen, so lässt sich stets ein System von $(p-1)^2$ endlichen Constanten

$$\begin{pmatrix} k_{11}, & k_{12}, & \ldots & k_{1,p-1} \\ k_{21}, & k_{22}, & \ldots & k_{2,p-1} \\ - & - & - & - \\ k_{p-1,1}, & k_{p-1,2}, & \ldots & k_{p-1,p-1} \end{pmatrix}$$

eindeutig durch die $(p-1)^2$ Gleichungen

$$(9)\begin{cases} -R_\mu(a_p, b_p) = k_{11} R_\mu(a_1, b_1) + k_{12} R_\mu(a_2, b_2) + \ldots + k_{1,p-1} R_\mu(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ -R_\mu(a_{p+1}, b_{p+1}) = k_{21} R_\mu(a_1, b_1) + k_{22} R_\mu(a_2, b_2) + \ldots + k_{2,p-1} R_\mu(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ -R_\mu(a_{2(p-1)}, b_{2(p-1)}) = k_{p-1,1} R_\mu(a_1, b_1) + k_{p-1,2} R_\mu(a_2, b_2) + \ldots + k_{p-1,p-1} R_\mu(_{p-1}, b_{p-1}) \\ \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p-1) \end{cases}$$

definiren, und es müssen dann für diese Constanten, wenn man noch

$$\left(\frac{d\,\varphi_\lambda(x,y)}{d\,x}\right) = \gamma_i \,(i = 1, 2, \ldots 2\,(p-1))$$

$$(x, y) = (a_i, b_i)$$

setzt, nothwendig die Relationen

$$(10)\begin{cases} -\gamma_p = k_{11}^2\,\gamma_1 + k_{12}^2\,\gamma_2 + \ldots + k_{1,p-1}^2\,\gamma_{p-1} \\ -\gamma_{p+1} = k_{21}^2\,\gamma_1 + k_{22}^2\,\gamma_2 + \ldots + k_{2,p-1}^2\,\gamma_{p-1} \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \ldots \quad - \quad - \quad - \\ -\gamma_{2\,(p-1)} = k_{p-1,1}^2\,\gamma_1 + k_{p-1,2}^2\,\gamma_2 + \ldots + k_{p-1,p-1}^2\,\gamma_{p-1} \end{cases}$$

bestehen.

Da wir nun die Stellen (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \ldots 2\,(p-1)$ wirklich in der angegebenen Weise auswählen konnten, so folgt aus den Gleichungen (10), deren linke Seiten, wie wir sahen, wegen der 5ten typischen Eigenschaft sämmtlich von Null verschieden sind, dass für jeden Werth $\sigma = 1, 2, \ldots p-1$ unter den Zahlen 1, 2, . . . $p-1$ mindestens eine Zahl r_σ existiren muss, in Bezug auf welche $k_{\sigma r_\sigma} \neq 0$ ist. Hieraus folgt aber sofort, dass die Determinante

$$E = \begin{vmatrix} R_1(a_1, b_1), \ldots R_1(a_{r_\sigma-1}, b_{r_\sigma-1}), R_1(a_{p+\sigma-1}, b_{p+\sigma-1}), R_1(a_{r_\sigma+1}, b_{r_\sigma+1}), \ldots R_1(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ R_{p-1}(a_1, b_1), \ldots R_{p-1}(a_{r_\sigma-1}, b_{r_\sigma-1}), R_{p-1}(a_{p+\sigma-1}, b_{p+\sigma-1}), R_{p-1}(a_{r_\sigma+1}, b_{r_\sigma+1}), \ldots R_{p-1}(a_{p-1}, b_{p-1}) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist; denn durch Auflösung der in (9) enthaltenen Gleichungen

$$-R_\mu(a_{p+\sigma-1}, b_{p+\sigma-1}) = k_{\sigma 1} R_\mu(a_1, b_1) + \ldots + k_{\sigma, r_\sigma} R_\mu(a_{r_\sigma}, b_{r_\sigma}) + \ldots + k_{\sigma, p-1} R_\mu(a_{p-1}, b_{p-1})$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots p-1)$$

ergiebt sich, dass der Werth von E abgesehen vom Vorzeichen mit dem Produkte

$$k_{\sigma, r_\sigma} \cdot \begin{vmatrix} R_1(a_1, b_1), & R_1(a_2, b_2), & \ldots & R_1(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ R_2(a_1, b_1), & R_2(a_2, b_2), & \ldots & R_2(a_{p-1}, b_{p-1}) \\ \quad - \quad & \quad - \quad & \quad - \quad & \quad - \quad \\ R_{p-1}(a_1, b_1), & R_{p-1}(a_2, b_2), & \ldots & R_{p-1}(a_{p-1}, b_{p-1}) \end{vmatrix}$$

übereinstimmen muss. Wegen $E \neq 0$ können wir aber offenbar in dem soeben gefundenen Satze I die Stellen $(a_1, b_1), \ldots (a_{p-1}, b_{p-1})$ durch die Stellen $(a_1, b_1), \ldots (a_{r_\sigma - 1}, b_{r_\varrho - 1})$, $(a_{p+\sigma-1}, b_{p+\sigma-1})$, $(a_{r_\sigma+1}, b_{r_\sigma+1})$, $\ldots (a_{p-1}, b_{p-1})$ und die Stellen (a_p, b_p), $\ldots (a_{2(p-1)}, b_{2(p-1)})$ durch die Stellen (a_p, b_p), $\ldots (a_{p+\sigma-2}, b_{p+\sigma-2})$, $(a_{r_\sigma}, b_{r_\sigma})$, $(a_{p+\sigma}, b_{p+\sigma})$, $\ldots (a_{2(p-1)}, b_{2(p-1)})$ ersetzen und erhalten dann nach dem genannten Satze folgendes Ergebniss:

Es lässt sich ein System von $(p-1)^2$ endlichen Constanten

$$\begin{pmatrix} l_{11}, & l_{12}, & \ldots & l_{1,p-1} \\ l_{21}, & l_{22}, & \ldots & l_{2,p-1} \\ — & — & — & — \\ l_{p-1,1}, & l_{p-1,2} & \ldots & l_{p-1,p-1} \end{pmatrix}$$

eindeutig durch die $(p-1)^2$ Gleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} -R_\mu(a_{p+\varrho-1}, b_{p+\varrho-1}) = \sum_{i=1}^{r_\varrho - 1}[l_{\varrho i} R_\mu(a_i, b_i)] + l_{\varrho r_\sigma} R_\mu(a_{p+\sigma-1}, b_{p+\sigma-1}) + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}[l_{\varrho i} R_\mu(a_i, b_i)] \\ \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \sigma - 1) \\ -R_\mu(a_{r_\sigma}, b_{r_\sigma}) = \sum_{i=1}^{r_\sigma - 1}[l_{\sigma i} R_\mu(a_i, b_i)] + l_{\sigma r_\sigma} R_\mu(a_{p+\sigma-1}, b_{p+\sigma-1}) + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}[l_{\sigma i} R_\mu(a_i, b_i)] \\ -R_\mu(a_{p+\varrho-1}, b_{p+\varrho-1}) = \sum_{i=1}^{r_\sigma - 1}[l_{\varrho i} R_\mu(a_i, b_i)] + l_{\varrho r_\sigma} R_\mu(a_{p+\sigma-1}, b_{p+\sigma-1}) + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}[l_{\varrho i} R_\mu(a_i, b_i)] \\ \qquad (\varrho = \sigma+1, \ldots p-1) \\ \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p-1) \end{cases}$$

definieren, und für diese Constanten bestehen dann die Relationen

$$(12)\quad \begin{cases} -\gamma_{p+\varrho-1} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1} l^2_{\varrho i}\gamma_i + l^2_{\varrho r_\sigma}\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1} l^2_{\varrho i}\gamma_i \quad (\varrho = 1,2,\ldots\sigma-1) \\ -\gamma_{r_\sigma} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1} l^2_{\sigma i}\gamma_i + l^2_{\sigma r_\sigma}\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1} l^2_{\sigma i}\gamma_i \\ -\gamma_{p+\varrho-1} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1} l^2_{\sigma i}\gamma_i + l^2_{\varrho r_\sigma}\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1} l^2_{\varrho i}\gamma_i \quad (\varrho = \sigma+1,\ldots p-1). \end{cases}$$

Andererseits kann man aber das Gleichungssystem (9), indem man die darin enthaltenen Gleichungen

$$-R_\mu(a_{p+\sigma-1},b_{p+\sigma-1}) = k_{\sigma 1}R_\mu(a_1,b_1) + \ldots + k_{\sigma r_\sigma}R_\mu(a_{r_\sigma},b_{r_\sigma}) + \ldots + k_{\sigma,p-1}R_\mu(a_{p-1},b_{p-1})$$
$$(\mu = 1,\ 2,\ \ldots\ p-1),$$

was wegen $k_{\sigma r_\sigma} \neq 0$ stets möglich, nach $R_\mu\,(a_{r_\sigma},\ b_{r_\sigma})$ auflöst und der gefundene Ausdruck in die übrigen Gleichungen einsetzt, ganz direkt in

$$(13)\quad \begin{cases} -R_\mu(a_{p+\varrho-1},b_{p+\varrho-1}) = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\left\{(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}}k_{\sigma i})R_\mu(a_i,b_i)\right\} + \left(-\frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}}\right)R_\mu(a_{p+\sigma-1},b_{p+\sigma-1}) + \\ \qquad\qquad \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}\left\{(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}}k_{\sigma i})R_\mu(a_i,b_i)\right\} \\ \qquad\qquad (\varrho = 1,\ 2,\ \ldots\ \sigma-1) \\ -R_\mu(a_{r_\sigma},b_{r_\sigma}) = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\frac{k_{\sigma i}}{k_{\sigma r_\sigma}}R_\mu(a_i,b_i) + \frac{1}{k_{\sigma r_\sigma}}R_\mu(a_{p+\sigma-1},b_{p+\sigma-1}) + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}\frac{k_{\sigma i}}{k_{\sigma r_\sigma}}R_\mu(a_i,b_i) \\ -R_\mu(a_{p+\varrho-1},b_{p+\varrho-1}) = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\left\{(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}}k_{\sigma i})R_\mu(a_i,b_i)\right\} + \left(-\frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}}\right)R_\mu(a_{p+\sigma-1},b_{p+\sigma-1}) + \\ \qquad\qquad \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}\left\{(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}}k_{\sigma i})R_\mu(a_i,b_i)\right\} \\ \qquad\qquad (\varrho = \sigma+1,\ \ldots\ p-1) \\ \qquad\qquad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots\ p-1) \end{cases}$$

überführen; und auf genau demselben Wege d. h. durch Auflösung der σten Gleichung nach γ_{r_σ} und Einsetzung des gefundenen Ausdruckes in die übrigen Gleichungen geht das System (10) direkt über in

$$(14)\quad \begin{cases} -\gamma_{p+\varrho-1} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\left(k_{\varrho i}^2 - \frac{k_{\varrho r_\sigma}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2} k_{\sigma i}^2\right)\gamma_i + \left(-\frac{k_{\varrho r_\sigma}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\right)\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma-1}^{p-1}\left(k_{\varrho i}^2 - \frac{k_{\varrho r_\sigma}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2} k_{\sigma i}^2\right)\gamma_i \\ \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \sigma - 1) \\ -\gamma_{r_\sigma} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\frac{k_{\sigma i}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_i + \frac{1}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma-1}^{p-1}\frac{k_{\sigma i}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_i \\ -\gamma_{p+\varrho-1} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\left(k_{\varrho i}^2 - \frac{k_{\varrho r_\sigma}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2} k_{\sigma i}^2\right)\gamma_i + \left(-\frac{k_{\varrho r_\sigma}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\right)\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma-1}^{p-1}\left(k_{\varrho i}^2 - \frac{k_{\varrho r_\sigma}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2} k_{\sigma i}^2\right)\gamma_i \\ \qquad (\varrho = \sigma + 1, \ldots p - 1). \end{cases}$$

Da nun die Constanten $l_{\varrho\nu}$ ($\varrho, \nu = 1, 2, \ldots p-1$), wie wir sahen, durch das System (11) eindeutig definiert sind, so ergiebt der Vergleich von (11) und (13), dass nothwendig

$$l_{\varrho i} = k_{\varrho i} - \frac{k_{\sigma r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i} \begin{pmatrix} \varrho = 1,2,\ldots \sigma-1 \\ i = 1,2,\ldots r_\sigma - 1 \end{pmatrix}, \quad l_{\varrho r_\sigma} = -\frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} (\varrho = 1,2,\ldots\sigma-1), \quad l_{\varrho i} = k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}$$

$$\begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots \sigma - 1 \\ i = r_\sigma + 1, \ldots p - 1 \end{pmatrix}$$

$$l_{\sigma i} = \frac{k_{\sigma i}}{k_{\sigma r_\sigma}} (i = 1, 2, \ldots r_\sigma - 1), \quad l_{\sigma r_\sigma} = \frac{1}{k_{\sigma r_\sigma}}, \quad l_{\sigma i} = \frac{k_{\sigma i}}{k_{\sigma\varrho\sigma}} (i = r_\sigma + 1, \ldots p-1)$$

$$l_{\varrho i} = k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i} \begin{pmatrix} \varrho = \sigma+1, \ldots p-1 \\ i = 1, 2, \ldots r_\sigma - 1 \end{pmatrix}, \quad l_{\varrho r_\sigma} = -\frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} (\varrho = \sigma+1, \ldots p-1), \quad l_{\varrho i} = k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}$$

$$\begin{pmatrix} \varrho = \sigma + 1, \ldots p - 1 \\ i = r_\sigma + 1, \ldots p - 1 \end{pmatrix}$$

sein muss. Bei Einsetzung dieser Werthe in (12) ergiebt sich

$$(15)\begin{cases} -\gamma_{p+\varrho-1} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\left(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}\right)^2 \gamma_i + \frac{k_{\varrho r_\varrho}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}\left(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}\right)^2 \gamma_i (\varrho = 1, 2, \ldots \sigma-1) \\ -\gamma_{r_\sigma} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1} \frac{k_{\sigma i}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_i + \frac{1}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}\frac{k_{\sigma i}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_i \\ -\gamma_{p+\varrho-1} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\left(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}\right)^2 \gamma_i + \frac{k_{\varrho r_\sigma}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}\left(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}\right)^2 \gamma_i (\varrho = \sigma+1, \ldots p-1) \end{cases}$$

Durch Subtraction der Gleichungen (15) von den entsprechenden Gleichungen (14) erhält man

$$\begin{cases} 0 = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\frac{2k_{\varrho r_\sigma} k_{\sigma i}}{k_{\sigma r_\sigma}}\left(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}\right)\gamma_i - \frac{2k_{\varrho r_\sigma}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}\frac{2k_{\varrho r_\sigma} k_{\sigma i}}{k_{\sigma r_\sigma}}\left(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}\right)\gamma_i \\ \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \sigma-1) \\ 0 = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1} 0 \cdot \gamma_i + 0 \cdot \gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1} 0 \cdot \gamma_i \\ 0 = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1}\frac{2k_{\varrho r_\sigma} k_{\sigma i}}{k_{\sigma r_\sigma}}\left(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}\right)\gamma_i - \frac{2k_{\varrho r_\sigma}^2}{k_{\sigma r_\sigma}^2}\gamma_{p+\sigma-1} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1}\frac{2k_{\varrho r_\sigma} k_{\sigma i}}{k_{\sigma r_\sigma}}\left(k_{\varrho i} - \frac{k_{\varrho r_\sigma}}{k_{\sigma r_\sigma}} k_{\sigma i}\right)\gamma_i \\ \qquad (\varrho = \sigma+1, \ldots p-1) \end{cases}$$

Nach Division durch 2 aus Multiplikation mit $k_{\sigma r_\sigma}$ gehen diese Gleichungen, wenn man in ihnen für $-\gamma_{p+\sigma-1}$ den aus der σten Gleichung (10) sich ergebenden Werth

$$-\gamma_{p+\sigma-1} = k_{\sigma 1}^2\gamma_1 + \ldots + k_{\sigma, p-1}^2\gamma_{p-1} = \sum_{i=1}^{r_\sigma-1} k_{\sigma i}^2\gamma_i + k_{\sigma r_\sigma}^2\gamma_{r_\sigma} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1} k_{\sigma i}^2\gamma_i$$

einsetzt, über in

$$0 = k_{\varrho r_\sigma}\left[\sum_{i=1}^{r_\sigma-1} k_{\sigma i} k_{\varrho i}\gamma_i + k_{\sigma r_\sigma} k_{\varrho r_\sigma}\gamma_{r_\sigma} + \sum_{i=r_\sigma+1}^{p-1} k_{\sigma i} k_{\varrho i}\gamma_i\right] (\varrho = 1, \ldots \sigma-1, \sigma+1, \ldots p-1),$$

wofür man offenbar schreiben kann:

$$(16) \qquad k_{\varrho r_\sigma} \sum_{i=1}^{p-1} k_{\varrho i} k_{\sigma i} \gamma_i = 0 \,(\varrho = 1, \ldots \sigma - 1, \sigma + 1, \ldots p - 1)$$

Unter den Grössen $k_{\sigma 1}, k_{\sigma 2}, \ldots k_{\sigma, p-1}$ seien nun diejenigen, welche nicht verschwinden, mit $k_{\sigma m_1}, k_{\sigma m_2}, \ldots k_{\sigma m_l}$ bezeichnet, so dass

$$(17) \quad \sum_{i=1}^{p-1} k_{\varrho i} k_{\sigma i} \gamma_i = k_{\varrho m_1} k_{\sigma m_1} \gamma_{m_1} + k_{\varrho m_2} k_{\sigma m_2} \gamma_{m_2} + \ldots + k_{\varrho m_l} k_{\sigma m_l} \gamma_{m_l}$$

ist, wobei $1 \leqq l \leqq p - 1$ sein muss; offenbar hätte man dann für r_σ jede der Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_l$ wählen können, wodurch sich gemäss (16) die Gleichungen

$$(18) \qquad k_{\varrho m_\nu} \sum_{i=1}^{p-1} k_{\varrho i} \, k_{\sigma i} \, \gamma_i = 0 \;\; (\nu = 1, 2, \ldots l)$$

ergeben. Ist daher eine der Grössen $k_{\varrho m_1}, k_{\varrho m_2}, \ldots k_{\varrho m_l}$ von Null verschieden, so verschwindet $\sum_{i=1}^{p-1} k_{\varrho i} k_{\sigma i} \gamma_i$ wegen der betreffenden Gleichung (18), während sich, wenn alle Grössen $k_{\varrho m_1}, k_{\varrho m_2}, \ldots k_{\varrho m_l}$ verschwinden, dasselbe Resultat aus (17) ergiebt; es muss deshalb in allen Fällen

$$\sum_{i=1}^{p-1} k_{\varrho i} \, k_{\sigma i} \, \gamma_i = 0 \,(\varrho = 1, \ldots \sigma - 1, \sigma + 1, \ldots p - 1) \text{ sein;}$$

da nun hierin für σ eine ganz beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots p - 1$ gewählt war, so können wir mit Hinzunahme der Gleichungen (10) offenbar schreiben

$$\sum_{i=1}^{p-1} k_{\varrho i} \, k_{\sigma i} \, \gamma_i = \begin{cases} -\gamma_{p+\sigma-1}, & \varrho = \sigma \\ 0, & \varrho \neq \sigma \end{cases} \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots p - 1)$$

Nach Division durch die von Null verschiedenen Grössen $-\gamma_{p+\sigma-1}$ erhalten wir daher, wenn wir noch

$$(19)\quad r_{\mu\nu} = -\frac{k_{\nu\mu}\,\gamma_\mu}{\gamma_{p+\nu-1}} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p-1)$$

setzen, das bemerkenswerthe Resultat

$$(20)\quad \sum_{i=1}^{p-1} k_{\varrho i}\, r_{i\sigma} = \begin{cases} 1, & \varrho = \sigma \\ 0, & \varrho \neq \sigma \end{cases} \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots p-1)$$

Durch diese $(p-1)^2$ Gleichungen, aus denen sich direkt

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1,\,p-1} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2,\,p-1} \\ - & - & - & - \\ k_{p-1,1} & k_{p-1,2} & \ldots & k_{p-1,\,p-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1,\,p-1} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2,\,p-1} \\ - & - & - & - \\ r_{p-1,1} & r_{p-1,2} & \ldots & r_{p-1,\,p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

also

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1,\,p-1} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2,\,p-1} \\ - & - & - & - \\ k_{p-1,1} & k_{p-1,2} & \ldots & k_{p-1,\,p-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

ergiebt, wird aber das System

$$\begin{pmatrix} r_{11}, & r_{12}, & \ldots & r_{1,\,p-1} \\ r_{21}, & r_{22}, & \ldots & r_{2,\,p-1} \\ - & - & - & - \\ r_{p-1,1}, & r_{p-1,2}, & \ldots & r_{p-1,\,p-1} \end{pmatrix}$$

bekanntlich eindeutig, als das reciproke System zu

$$\begin{pmatrix} k_{11}, & k_{12}, & \ldots & k_{1,\,p-1} \\ k_{21}, & k_{22}, & \ldots & k_{2,\,p-1} \\ - & - & - & - \\ k_{p-1,1}, & k_{p-1,2}, & \ldots & k_{p-1,\,p-1} \end{pmatrix}$$

definirt, weshalb wir den Gleichungen (20) sofort die weiteren Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{p-1} k_{i\varrho}\, r_{\sigma i} = \begin{cases} 1, & \varrho = \sigma \\ 0, & \varrho \neq \sigma \end{cases} \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots p-1)$$

an die Seite stellen können, welche wegen (19) übergehen in

$$(21)\qquad \sum_{i=1}^{p-1}\frac{k_{i\varrho}\,k_{i\sigma}}{\gamma_{p+i-1}}=\begin{cases}-\dfrac{1}{\gamma_\sigma}, & \varrho=\sigma\\ 0, & \varrho\neq\sigma\end{cases}\qquad(\varrho,\sigma=1,2,\ldots p-1).$$

Sind daher μ, ν irgend 2 der Zahlen $1, 2, \ldots p-1$, so folgt aus den in (9) enthaltenen Gleichungen

$$\begin{cases}-R_\mu(a_{p+i-1},b_{p+i-1})=\sum_{\varrho=1}^{p-1}k_{i\varrho}\,R_\mu(a_\varrho,b_\varrho)\\ -R_\nu(a_{p+i-1},b_{p+i-1})=\sum_{\sigma-1}^{p-1}k_{i\sigma}\,R_\nu(a_\sigma\,b_\sigma)\end{cases}\qquad(i=1,2,\ldots p-1)$$

durch Multiplikation und Summenbildung, dass

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{R_\mu(a_{p+i-1},b_{p+i-1})\,.\,R_\nu(a_{p+i-1},b_{p+i-1})}{\gamma_{p+i-1}}=\sum_{\varrho,\sigma,i=1}^{p-1}R_\mu(a_\varrho,b_\varrho)\,R_\nu(a_\sigma,b_\sigma)\,\frac{k_{i\varrho}\,k_{i\sigma}}{\gamma_{p+i-1}}=$$

$$=-\sum_{\sigma=1}^{p-1}\frac{R_\mu(a_\sigma,b_\sigma)\,.\,R_\nu(a_\sigma,b_\sigma)}{\gamma_\sigma}$$

ist. Aus der geforderten eindeutigen Umkehrbarkeit des Systems (I) hat sich also weiterhin noch folgender Satz ergeben:

II. Sind (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$ (a_{p-1}, b_{p-1}) irgend $p-1$ der Stellen $(a_i^{(\lambda)}, b_i^{(\lambda)})$ $(i=1, 2, \ldots \tau_\lambda)$, welche die Bedingung

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} R_1\ (a_1, b_1), & R_1\ (a_2\ b_2), & \ldots & R_1\ (a_{p-1}, b_{p-1})\\ R_2\ (a_1, b_1), & R_2\ (a_2, b_2), & \ldots & R_2\ (a_{p-1}, b_{p-1})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{p-1}(a_1, b_1), & R_{p-1}(a_2, b_2), & \ldots & R_{p-1}(a_{p-1}, b_{p-1})\end{vmatrix}\neq 0$$

erfüllen, und sind (a_p, b_p), (a_{p+1}, b_{p+1}), $\ldots$ $(a_{2(p-1)}, b_{2(p-1)})$ beliebige andere, von einander verschiedene aus den genannten Stellen, so müssen, wenn man

$$\left(\frac{d\varphi_\lambda(x,y)}{dx}\right)_{(x,y)=(a_i,b_i)} = \gamma_i \; (i = 1, 2, \ldots 2(p-1))$$

setzt, nothwendig dic $(p-1)^2$ Beziehungen

$$(23)\quad \left\{ \sum_{k=1}^{p-1} \frac{R_\mu(a_k, b_k) \cdot R_\nu(a_k, b_k)}{\gamma_k} = -\sum_{k=1}^{p-1} \frac{R_\mu(a_{p+k-1}, b_{p+k-1}) \cdot R_\nu(a_{p+k-1}, b_{p+k-1})}{\gamma_{p+k-1}} \right.$$
$$\left. (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p-1) \right.$$

bestehen.

Gesetzt nun, es sei $\tau_\lambda > 2(p-1)$, so existiert unter den Stellen $(a_i^{(\lambda)}, b_i^{(\lambda)})$ $(i = 1, 2, \ldots \tau_\lambda)$ sicher eine Stelle (a, b), welche von den Stellen (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \ldots 2(p-1))$, die wir in der angegebenen Weise hatten wählen können, verschieden ist und für welche wegen der typischen Eigenschaften die Grösse $\left(\frac{d\varphi_\lambda(x,y)}{dx}\right)_{(x,y)=(a,b)} = \gamma$ ebensowenig verschwindet oder unendlich ist, wie die Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{2(p-1)}$.

Betrachtet man daher zunäehst den Fall $p = 2$, so könnten wir in dem eben gefundenen Satze II, der hier die Gleichung

$$\frac{R_1^2(a_1, b_1)}{\gamma_1} = -\frac{R_1^2(a_2, b_2)}{\gamma_2}$$

liefert, offenbar jede der Stellen (a_1, b_1), (a_2, b_2) durch (a, b) ersetzen; denn die Bedingung (22), an welche diese Gleichung geknüpft ist, lautet in diesem Falle $R_1(a_1, b_1) \neq 0$ und wird daher wegen der 4ten typischen Eigenschaft hinsichtlich sämmtlicher Grössen $R_1(a_1, b_1)$, $R_1(a_2, b_2)$, $R_1(a, b)$ schon von selbst erfüllt. Demgemäss würden wir die letztgenannte Gleichung zu dem System:

$$1 \cdot \frac{R_1^2(a_1, b_1)}{\gamma_1} + 1 \cdot \frac{R_1^2(a_2, b_2)}{\gamma_2} + 0 \cdot \frac{R_1^2(a, b)}{\gamma} = 0$$
$$1 \cdot \frac{R_1^2(a_1, b_1)}{\gamma_1} + 0 \cdot \frac{R_1^2(a_2, b_2)}{\gamma_2} + 1 \cdot \frac{R_1^2(a, b)}{\gamma} = 0$$
$$0 \cdot \frac{R_1^2(a_1, b_1)}{\gamma_1} + 1 \cdot \frac{R_1^2(a_2, b_2)}{\gamma_2} + 1 \cdot \frac{R_1^2(a, b)}{\gamma} = 0$$

vervollständigen können, woraus sich, da hier alles endlich ist, wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

nothwendig

$$\frac{R_1^2(a_1, b_1)}{\gamma_1} = \frac{R_1^2(a_2, b_2)}{\gamma_2} = \frac{R_1^2(a, b)}{\gamma} = 0,$$

also $R_1(a_1, b_1) = R_1(a_2, b_2) = R_1(a, b) = 0$ ergäbe; und dies steht in Widerspruch mit den eben genannten typischen Eigenschaften. Folglich ist für $p = 2$ die Annahme $\tau_\lambda > 2(p-1)$ unzulässig, und es muss daher, da andererseits, wie wir sahen $\tau_\lambda \geqq 2(p-1)$ ist, im Falle $p = 2$ in der That $\tau_\lambda = 2(p-1)$ sein.

Da also dieser Fall hiermit erledigt ist, so setzen wir $p \geqq 3$ voraus und wissen dann, dass wir im Satze II wenigstens jede der Stellen $(a_p, b_p), (a_{p+1}, (b_{p+1}), \ldots (a_{2(p-1)}, b_{2(p-1)})$ durch (a, b) ersetzen können, wodurch sich zum Gleichungssystem (23) noch weitere $p-1$ analog gebildete Gleichungssysteme hinzugesellen. Durch Vergleich der letzteren mit (23) ergiebt sich aber sofort.

$$\frac{R_\mu(a_{p+i-1}, b_{p+i-1}) R_\nu(a_{p+i-1}, b_{p+i-1})}{\gamma_{p+i-1}} = \frac{R_\mu(a,b) \cdot R_\nu(a,b)}{\gamma} \quad (i = 1, 2, \ldots p-1)$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots p-1),$$

wodurch die Gleichungen (23) übergehen in

$$(24) \quad \sum_{k=1}^{p-1} \frac{R_\mu(a_k, b_k) \cdot R_\nu(a_k, b_k)}{\gamma_k} = -(p-1) \frac{R_\mu(a,b) R_\nu(a,b)}{\gamma}$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots p-1)$$

Nach dem Multiplikationstheorem für Determinanten würde aber hieraus

$$\begin{vmatrix} R_1\ (a_1,b_1), \dots R_1\ (a_{p-1},b_{p-1}) \\ \text{— — — — —} \\ R_{p-1}(a_1,b_1), \dots R_{p-1}(a_{p-1},b_{p-1}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{R_1(a_1,b_1)}{\gamma_1}, \dots \frac{R_1(a_{p-1},b_{p-1})}{\gamma_{p-1}} \\ \text{— — — — —} \\ \frac{R_{p-1}(a_1,b_1)}{\gamma_1}, \dots \frac{R_{p-1}(a_{p-1},b_{p-1})}{\gamma_{p-1}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{p-1}{\gamma}\right)^{p-1} \begin{vmatrix} R_{11}\ , \dots R_{1,p-1} \\ \text{— — —} \\ R_{p-1,1}, \dots R_{p-1,p-1} \end{vmatrix}$$

folgen, wo $R_\mu\,(a,\,b)\,.\,R_\nu\,(a\,b) = R_{\mu\nu}\,(\mu,\,\nu = 1,\,2,\,\dots\,p-1)$ gesetzt ist. Da dies nun, wie sofort zu sehen, gleichbedeutend ist mit

$$\frac{1}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_{p-1}} \left\{ \begin{vmatrix} R_1\ (a_1,b_1), \dots R_1\ (a_{p-1},b_{p-1}) \\ \text{— — — — —} \\ R_{p-1}(a_1,b_1), \dots R_{p-1}(a_{p-1},b_{p-1}) \end{vmatrix} \right\}^2 = \left(-\frac{p-1}{\gamma}\right)^{p-1} [R_1(a,b) \dots R_{p-1}(a,b)]^2 . \begin{vmatrix} 1\ 1 \dots 1 \\ 1\ 1 \dots 1 \\ \text{— —} \\ 1\ 1 \dots 1 \end{vmatrix}$$

und da wegen $p \geqq 3$ der Grad $p-1$ der rechtsstehenden Determinante mindestens 2 beträgt und diese Determinante desshalb wegen Uebereinstimmung ihrer Reihen nothwendig verschwinden muss, so folgt, dass in Anbetracht des sicher endlichen, von Null verschiedenen Werthes von $\frac{1}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_{p-1}}$ nothwendig

$$\begin{vmatrix} R_1\ (a_1,\ b_1),\ R_1\ (a_2,\ b_2),\ \dots\ R_1\ (a_{p-1},\ b_{p-1}) \\ R_2\ (a_1,\ b_1),\ R_2\ (a_2,\ b_2),\ \dots\ R_2\ (a_{p-1},\ b_{p-1}) \\ \text{— — — — —} \\ R_{p-1}\,(a_1,\ b_1),\ R_{p-1}\,(a_2,\ b_2),\ \dots\ R_{p-1}\,(a_{p-1},\ b_{p-1}) \end{vmatrix} = 0$$

sein müsste; und dies steht im Widerspruch zu der 6ten typischen Eigenschaft, welcher entsprechend wir die Stellen

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \dots\ (a_{p-1},\ b_{p-1})$$

gewählt hatten; es ist also die Annahme $\tau_\lambda > 2\,(p-1)$ auch hier unzulässig und es ist somit, da andererseits, wie wir wissen, $\tau_\lambda \geqq 2\,(p-1)$ sein muss, gezeigt, dass in allen Fällen für jedes typische System nothwendig die Relationen

$$\tau_\lambda = 2\,(p-1)\ \ (\lambda = 1,\,2,\,\dots\,p)$$

bestehen müssen.

Nach den Darlegungen am Ende des § 5 ist aber hiermit der Beweis des in der Einleitung angekündigten Satzes vollständig erbracht. Mit Hinzunahme der aus der Theorie der Abel'schen Functionen bekannten Umkehrung des letzteren können wir also folgendes Resultat aussprechen:

Das Gleichungssystem (I) ist dann und nur dann in dem in der Einleitung angegebenen Sinne eindeutig umkehrbar, wenn für die Functionen $R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ irgend p linear unabhängige Integranden erster Gattung gewählt werden.

Vita.

Natus sum Bernhardus de Ludwig in villa Neuwaltersdorf die XVI. Octobris anni MDCCCLXIV patre Roberto, matre Josephina e gente de Humbracht. Fidei adscriptus sum catholicae. Gymnasium frequentavi Glacense. Maturitatis testimonio vere anni MDCCCLXXXII accepto, militiam capessere constitui et Berolini atque Danzigi et didici rem militarem et ordines duxi. Ad altiorem dignitatis gradum provectus, per valetudinem militiam missam facere cogebar, quod consilium eo facilius exsecutus sum, quo magis jam diu cupiebam, ad rerum mathematicarum et philosophiae studia me conferre. Qua re vere anni MDCCCLXXXXIV universitatem adii Berolinensem et, facultati philosophorum adscriptus, per quinque annos in primis audivi viros doctissimos Fuchs, Schwarz, Frobenius, Knoblauch, Dilthey, Lasson, Simmel.

Thesen.

I.

Bei den successiven Erweiterungen des Zahlengebietes ist es unzulässig, die Definition der neuen Zahlen allein aus dem Princip der Permanenz zu deducieren.

II.

Eine einwandfreie Theorie der Irrationalzahlen ist nur unter der Voraussetzung möglich, dass der Quantitätsbegriff in einem, von dem gewöhnlichen vollständig abweichenden Sinne interpretiert wird.

III.

Die Auflösung der geometrischen Anschauung in die Categorieen des begrifflichen Denkens ist nicht mit derjenigen Strenge vollziehbar, welche sich in den Disciplinen der reinen Mathematik erreichen lässt.